التوزيع الهندسي

❖ **تجربة برنولي:** هي تجربة عشوائية لها إحدى الناتجين فقط اما نجاح او فشل.

فمثلاً:

- عند تقديم اختبار يوجد خياران اما:

نجاح : نجاح

او رسوب: فشل .

- عند القاء قطعة نقد والمطلوب في هذه المسالة كتابة (T) فإن (H) الصورة هي الفشل و (T) هي النجاح.

- عند القاء قطعة نرد وانتظار ظهور العدد 4 فإن هذا يعني ان العدد 4 نجاح وأي عدد آخر هو فشل.

التجربة الاحتمالية الهندسية

يطلق على تكرار تجربة برنولي عددا من المرات المستقلة حتى التوصل إلى أو نجاح.

شروط التجربة الاحتمالية

1) اشتمال التجربة على محاولات مستقلة متكررة(دائما متوقع أما النجاح أو الفشل)

2) فرز النتائج إلى نجاح أو فشل .

3) ثبات احتمال النجاح في كل محاولة. (دائما احتمال النجاح ثابت).

4) التوقف عند أول نجاح.

بين إذا كانت التجارب التالية تجربة احتمالية هندسية في كل مما يلي:

1 تدوير سلمى المتكرر المؤشر القرص المجاور الذي ينقسم إلى 4 قطاعات متطابقة، ثم توقفها عند توقف المؤشر على اللون الأحمر.

- بما أن التجارب مستقلة أي أنها في كل مرة تدور لا يؤثر الناتج على التجربة الي قبلها ومكررة حتى الوصول لهدف.
- دائما تفرز النتيجة بنجاح إذا كان المؤشر على الأحمروفشل إذا كان المؤشر على لون غير الأحمر.
- ثبات محاول النجاح دائما.

$$p = \frac{n \to \text{أحمر}}{n \to \text{جميع}} = \frac{1}{4}$$

- التوقف عند الحصول على اول نجاح

∴ هذا يعني أن التجربة احتمالية هندسية.

2 سحب كمال 3 كرات على التوالي من دون ارجاع من صندوق فيه 4 كرات حمراء و 5 كرات خضراء ثم كتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة

البحث في تحقق الشروط : بما ان النتيجة كل مرة تتأثر بنتائج سحب الكرات السابقة بسبب عدم ارجاع الكرات للصندوق فهذه المحاولات غير مستقلة $\Leftarrow$ هذه التجربة العشوائية لا تمثل تجربة احتمالية هندسية.

3 لو كانت الكرات المسحوبة على التوالي مع ارجاع هل تمثل تجربة احتمالية هندسية

الجواب لا : لا يوجد هدف (نجاح).

4 القاء محمد حجر نرد منتظماً 4 مرات ثم كتابة الأعداد الظاهرة .

ابحث في تحقق الشروط : في هذه التجربة لا يوجد هدف (نجاح) للوصول إليه $\Leftarrow$ ليست تجربة احتمالية هندسية.

5 القاء حنان قطعة نقد منتظمة بشكل متكرر ثم التوقف عند ظهور الصورة.

ابحث في تحقق الشروط : هناك تكرار في هذه التجربة كما انها مستقلة ويوجد هدف وهو الحصول على الصورة ثم التوقف عنده ولا تؤثر تجربة على أخرى كما ان احتمال النجاح ثابت هو $\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ هي تجربة احتماليه هندسية .

المتغير العشوائي

المتغير العشوائي X يدل على عدد المحاولات وصولا للهدف (النجاح) أول نجاح ويعبر عنه :

$$X \sim Geo\ (p)$$

هندسية

$P \Leftarrow$ هو احتمال النجاح الثابت

$X \Leftarrow$ احتمال المتغير العشوائي الهندسي:

$$X = \{1,2,3,4,\dots\}$$

وهو عدد المحاولات للوصول لأول نجاح.

- يمكن إيجاد احتمال أن يأخذ X قيمة بعينها ضمن مجموعة قيم محتملة حسب القاعدة التالية:

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$$

- دائما عند $X = 1$ يكون الاحتمال هو نسبة النجاح.

$$P(X = 1) = 1$$

أسئلة:

1 إذا كان $X \sim Geo(0.8)$ فأجد كلاً مما يأتي:

1 $P(X = 3)$

$P = 0.8$ احتمال النجاح

$X = 3$

$$P(X = 3) = p(1-p)^{X-1}$$
$$= (0.8)(1 - 0.8)^{3-1}$$
$$= (0.8)(0.2)^2$$
$$= (0.8)(0.04)$$
$$= 0.032$$

2 $P(X \leq 2)$

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= (0.8)(1-0.8)^0 + (0.8)(1-0.8)^1$$

$$= (0.8)(0.2)^1 + (0.8)(0.2)^0$$

$$= 0.96$$

3 $P(X > 3)$

هذا يعني الاحتمالات جميعها لقيم أكبر من 3

$$P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + \cdots$$

هو عدد لا نهائي من الاحتمالات وبما أن مجموع الاحتمالات دائما يساوي 1 ف يمكن حساب متممة الحادث.

$$P(X > 3) = 1 - (P(X \leq 3)$$

$$= 1 - (P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3))$$

$$= 1 - (P0.8 + 0.8(0.2) + 0.8(0.2)^2)$$

$$= 0.008$$

ملاحظة:

احتمال وقوع متممة الحادث A هو 1 ناقص احتمال وقوع الحادث A :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2 إذا كان $X \sim Geo(0.4)$ فأجد كلاً مما يأتي:

1 $P(X = 2)$

$$P(X = 2) = P(1-P)^{x-1}$$

$$= 0.4(1-0.4)^{2-1}$$

$$= 0.4(0.6)^1 = 0.24$$

2 $P(X \leq 3)$

هذا يعني جميع الاحتمالات من $X = 3$ الى $X = 1$:

$$= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 3) = P(1-P)^{X-1}$$

$$= 0.4(1-0.4)^{3-1}$$

$$= 0.4(0.6)^2$$

$$= 0.4(0.36) = 0.144$$

$$P(X = 2) = P(1-P)^{X-1}$$

$$= 0.4(1-0.4)^{2-1}$$

$$= 0.4(0.6)^1$$

$$= 0.24$$

$$P(X = 1) = P(1-P)^{X-1}$$

$$= 0.4(0.6)^0$$

$$= 0.4$$

$$\therefore P(X = 3) = 0.144 + 0.22 + 0.4$$

$$= 0.784$$

3 $P(X > 4)$

بما ان مجموع الاحتمالات 1 ولا يوجد عدد محدد من قيمة X فإن :

$$P(X > 4)$$

$$= 1 - P(X = 4) + P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1)$$

$$P(X = 4) = 0.4(1-0.4)^{4-1}$$

$$= 0.4(0.6)^3$$

$$= 0.0864$$

نستفيد من الفرع السابق (2) ان:

$$(P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= 0.784$$

$$\Rightarrow P(X > 4)$$

$$= 1 - (P(X = 4) + 0.784)$$

$$= 1 - (0.0864 + 0.784)$$

$$= 1 - 0.8740 = 0.1296$$

سؤال :

كرر أحمد محاولة تدوير مقبض الاشتعال في فرن مطبخه - بعد حدوث عطل فيه - حتى يتمكن من تشغيل الفرن لطهي الطعام. إذا كان احتمال اشتعال الفرن في كل محاولة هو $\frac{1}{3}$ ، ومثل X عدد محاولات أحمد حتى يشتعل الفرن، فأجد كُلاً مما يأتي:

1 احتمال أن يتمكَّن أحمد من إشعال الفرن في المحاولة الرابعة.

هذا يعني $X = 4$ واحتمال النجاح هو $P = \frac{1}{3}$

$$(1 - P) = \frac{2}{3}$$

$$P(X = 4) = P(1 - P)^{X-1}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{4-1}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{8}{81}$$

احتمال ان ينجح عند المحاولة الرابعة هو $\frac{8}{81}$

2 احتمال أن يحاول أحمد اشعال الفرن لاكثر من 4 مرات:

المطلوب حساب $P(X > 4)$

$$= 1 - (P(X = 4) + P(X = 3)P(X = 2) + P(X = 1))$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\right)$$

$$= \frac{16}{81}$$

احتمال أن يحاول أحمد اشعال الفرن لاكثر من 4 مرات $\frac{16}{81}$.

في دراسة لقسم الجودة في مصنع للأواني الفخارية، تبين أنه في 10% من الأواني الفخارية عيب مصنعي، إذا مثل X عدد الأواني الفخارية التي سيفحصها مراقب الجودة حتى إيجاد أول إناء معيب فجد كلا من :

هنا المطلوب هو إيجاد المعيبة يعني أن:

$$P = 10\% = \frac{10}{100} = 0.1$$

$$1 - P = 1 - 0.1 = 0.9$$

1 احتمال أن يكون الاناء العاشر هو أول إناء معيب يجده مراقب الجودة.

هذا يعني ان $X = 10$

$$P(X = 10) = P(1 - p)^{X-1}$$
$$= 0.1\,(0.9)^{10-1}$$
$$= 0.1\,(0.9)^{9}$$
$$= 0.0387420489$$

هذا يعني أن احتمال أن نجد الأناء العاشر معيب هو 0.0387420489

2 احتمال أن فحص مراقب الجودة أكثر من 3 أواني حتى يجد أول إناء معيب.

هذا يعني أن X أكبر من أو تساوي 4

$$P(X > 4) =$$
$$1 - \big(P(X = 4) + P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1)\big)$$

$$P(X = 4) = P(1 - p)^{X-1}$$
$$= 0.1\,(0.9)^{(4-1)}$$
$$= 0.1\,(0.729) = 0.0729$$

$$P(X = 3) = 0.1\,(0.9)^{3-1}$$
$$= 0.1\,(0.81)$$
$$= 0.081$$

$$P(X = 2) = 0.1\,(0.9)^{2-1}$$
$$= 0.1\,(0.9)^{1}$$
$$= 0.09$$

$$P(X = 1) = 0.1\,(0.9)^{0}$$
$$= 0.1(1) = 0.1$$

$$P(X > 4)$$
$$= 1 - (0.0729 + 0.081 + 0.09 + 0.1)$$
$$= 1 - (0.3439)$$
$$= 0.6561$$

التوقع للمتغير العشوائي الهندسي

إذا كان X متغيرا عشوائيا هندسيا فإن التوقع

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

p احتمال النجاح في كل محاولة

سؤال :

تتدرب لينا على مسابقة رمي السهام، إذا كان حكم سهما 0.2احتمال اصابتها الهدف هو يتوقع أن تطلق لينا حتى تصيب الهدف أول مرة.

بما أنه تم تكرار المحاولة حتى تصيب الهدف استعمل توقع المتغير الهندسي.

$$X \sim Geo\,(0.2)$$
$$E(X) = \frac{1}{P}$$
$$= \frac{1}{0.2} = 5$$

يتوقع أن تطلق لينا 5 أسهم حتى تصيب الهدف أول مرة.

قرر ريان القاء حجر نرد منتظم بشكل متكرر و التوقف عند ظهور العدد 4، كم مرة يتوقع أن يومي ريان حجر النرد ؟!

في تجربة القاء حجر النرد احتمال ظهور العدد 4 هو :

$$P = \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \frac{1}{P} = \frac{1}{\frac{1}{6}}$$

سوف يلقي الحجر 6 مرات حتى يحصل على العدد 6.

التوقع هو مقلوب الاحتمال الثابت.

أتدرب وأحل المسائل

أبين إذا كانت التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية هندسية في كل مما يأتي:

1 عدد الأسئلة التي ستجيب عنها أسماء إجابة صحيحة من بين 25 سؤالا من نوع الاختيار من متعدد، لكل منها 5 بدائل، واحد منها فقط صحيح، في حال الإجابة عن الأسئلة جميعها بصورة عشوائية.

- على رغم من إن نسبة النجاح ثابتة في كل مرة وهي $\frac{1}{5}$ واستقلالية المحاولات، لا يود فرز لنتائج الحل فهي ليست تجربة احتمالية هندسية.

2 رمي لاعب كرة سلة الكرة نحو الهدف بشكل متكرر، والتوقف عند إحراز الهدف أول مرة، علما بأن احتمال إحرازه الهدف في كل مرة هو 0.3.

- تجربة احتمالية هندسية وذلك لأنها متكررة ومستقلة واحتمال النجاح ثابت في كل مرة، وسيتوقف عند أحراز الهدف.

إذا كان $X \sim Geo(0.2)$ أوجد ما يأتي مقرباً لأقرب 3 منازل.

احتمال النجاح $P = 0.2$

الحل:

$$1 - P = 1 - 0.2 = 0.8$$

3 $P(X = 2)$

$= P(1 - P)^{X-1}$

$= 0.2\,(0.8)^{2-1}$

$= 0.2\,(0.8)$

$= 0.16$

4 $P(X \leq 3)$

$= P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1)$

$= 0.2(0.8)^{3-1} + 0.2(0.8)^{2-1} + 0.2(0.8)^{1-1}$

$= 0.128 + 0.16 + 0.2$

$= 0.488$

5 $P(X \geq 3)$

$P(X \geq 3) =$

$1 - (P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1))$

من الفرع السابق نأخذ

$P(X = 3) + P(X = 2)$
$+ P(X = 1) = 0.488$

$P(X \geq 3) = 1 - 0.488 = 0.512$

6 $P(3 \leq X \leq 5)$

$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$= 0.2(0.8)^2 + 0.2(0.8)^3 + 0.2(0.8)^4$

$= 0.2\,(0.64) + 0.2\,(0.512) + 0.2(0.4096)$

$= 0.31232 \approx 0.312$

7 $P(X < 4)$

$= P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1)$

وتم حلهل في الفرع رقم 4.

الجواب $= 0.488$

8 $P(X > 4)$

من الفرع (4)

$= 1 - P(x < 4)$

$= (0.488 + 0.2(0.8)^{4-1})$

$= 1 - 0.488 = 0.512$

9 $P(1 < X < 3)$

يعني المطلوب $P(X = 2)$ لانها تقع بينهم

$P(X = 2) = 0.2\,(0.8)^1$

$= 0.16$

10 $P(4 < X \leq 6)$

$= P(X = 5) + P(X = 6)$

$= 0.2\,(0.8)^4 + 0.2(0.8)^5$

$= 0.2\,(0.4096) + 0.2(0.32768)$

$= 0.0819 + 0.0655$

$= 0.147$

11 $P(X < 1) = P(X = 0) = 0$

12 ألقي حجر نرد منتظم ذو ثمانية أوجه مرقمة بالأرقام من 1 إلى 8 بشكل متكرر حتى ظهور العدد 7. أجد احتمال إلقاء حجر النرد 6 مرات.

الهدف ظهور العدد 7

عدد المحاولات 6 $X = 6$

الاحتمال: $P = \frac{1}{8}$

$1 - P = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$P(X = 6) = P(1 - P)^{X-1}$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^{6-1} = \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^{5}$

$= \frac{16807}{262144}$

أجد التوقع لكل من المتغيرات العشوائية.

13 $X \sim Geo\ (0.3)$

$P = 0.3 \quad E(X) = \frac{1}{P}$

$E(X) = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$

14 $X \sim Geo\ \left(\frac{3}{7}\right)$

$E(X) = \frac{1}{P} = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$

15 $X \sim Geo\ (0.45)$

$P = 0.45 = \frac{45}{100}$

$E(X) = \frac{100}{45} = \frac{20}{9}$

صناعة: وجد مصنع لوحدات الإنارة المكتبية أن احتمال أن تكون وحدة الإنارة معيبة هو 0.10. إذا مثل X عدد وحدات الإنارة التي سيفحصها مراقب الجودة حتى إيجاد أول وحدة إنارة معيبة، فأجد كلاً مما يأتي:

16 احتمال أن تكون وحدة الإنارة الخامسة هي أول وحدة معيبة يجدها مراقب الجودة.

هنا احتمال النجاح هو إيجاد إنارة معيبة.

$P = 0.1$

$1 - P = 1 - 0.1 = 0.9$

$X = 5$

$P(X = 5) = P\ (1 - P)^{(X-1)}$

$= 0.1(0.9)^4$

$= 0.1(0.6561)$

$= 0.06561$

17 احتمال أن يفحص مراقب الجودة أكثر من 4.

$P(X > 4)$

$= 1 - (P(X \leq 4)$

$= 1 - (P(X = 4) + P(X = 3)$

$+ P(X = 2) + P(X = 1))$

$$= 1 - (0.1(0.9)^3 + 0.1(0.9)^2 + 0.1(0.9)^1 + 0.1(0.9)^0)$$

$$= 1 - (0.0729 + 0.081 + 0.09 + 0.1)$$

$$= 1 - 0.3439$$

$$= 0.6561$$

18 العدد المتوقع من وحدات الإنارة التي سيفحصها مراقب الجودة حتى إيجاد أول وحدة إنارة معيبة.

$$E(X) = \frac{1}{0.1} = 10$$

التوقع هو مقلوب الإحتمال .

لعبة: اتفقت ليلى وزميلاتها على ألا تشارك أي منهم في لعبة حتي ترمي حجر نرد منتظما، ويظهر الرقم 6. إذا أرادت ليلى المشاركة في اللعبة، وكان X يمثل عدد مرات رميها حجر النرد حتى ظهور العدد 6 فأجد كلا مما يأتي:

19 احتمال أن ترمي ليلى حجر النرد 3 مرات لكي تشارك في اللعبة.

الهدوف ظهور العدد 6

$$P = \frac{1}{6}$$

$$1 - P = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(X = 3) = P(1 - P)^{(X-1)}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right) = \frac{25}{216}$$

20 احتمال أن ترمي ليلى حجر النرد أكثر من 3 مرات لكي تشارك في اللعبة.

$$P(X > 3)$$

$$1 - P(X \le 3)$$

$$= 1 - (P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1))$$

$$= 1 - \left(\frac{25}{216} + \frac{25}{36} + \frac{1}{6}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{25}{216} + \frac{150}{216} + \frac{36}{216}\right)$$

$$= \frac{216}{216} - \frac{211}{216} = \frac{5}{216}$$

21 **أكتشف الخطأ:** أرادت لانا حل السؤال الآتي: عند إلقاء قطعة نقد غير منتظمة، كان احتمال ظهور الصورة هو $\frac{2}{5}$. إذا ألقيت قطعة النقد بصورة متكررة حتى تظهر الصورة أول مرة، فما احتمال الصورة أول مرة عند القاء قطعة النقد في المرة الثانية. وكان حلها على النحو الآتي:

$$P(X = 2) = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{2}{5}\right)^2$$

$$= \frac{18}{125}$$

اكتشف الخطأ في حل لانا ثم أصححه مبررا اجابتي.

$$P(X = 2) = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{2-1}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{25}$$

22 تبرير : إذا كان $X\sim Geo(P)$ وكان :

$P(X\ \leq\ 3) = \frac{819}{1331}$ فاجد $P(X\ =3)$

مبرراً اجابتي.

$$X\sim Geo\ (p)$$

$$P(X\ \leq 3) = \frac{819}{1331}$$

جد $P(X\ >\ 3)$

الحل:

$$P(X > 3) = 1 - (P(X \leq 3)$$

$$P(X\ \leq\ 3) = 1 - \frac{819}{1331} = \frac{512}{1331}$$

23 تحد: إذا كان $X\sim Geo(P)$ وكان :

$P(X\ =1) = 0.2$ فاجد التوقع $E(X)$.

$$P(X\ =1) = 0.2$$

$$P(X\ =\ 1) =\ P\ (1\ -\ P)^{x\ -\ 1}$$

$$0.2\ =\ P(1\ -\ P)^{1\ -\ 1}$$

$$0.2\ = P(1\ -\ P)^{0}$$

احتمال النجاح

$$0.2 = P$$

المطلوب التوقع:

مقلوب الاحتمال:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$= \frac{1}{0.2} = \frac{10}{2} = 5$$

ترغب علا أن تستقل سيارة أجرة للذهاب إلى عملها. إذا كانت 5% من السيارات المارة بالشارع أمام منزلها هي سيارات أ جرة ، ومثل X عدد السيارات التي ستمر أمام علا حتى تشاهد أول سيارة أجرة، فأجد احتمال أن تشاهد علا سيارة أجرة اول مرة ، عند مرور السيارة السابعة من أمام منزلها.

$$P\ = 5\% = \frac{5 \div 5}{100 \div 5} = \frac{1}{20}$$

$$1 - P\ = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

$$X\ = 7$$

$$P(X\ = 7) = P(1 - P)^{x-1}$$

$$= \frac{1}{20}\left(1 - \frac{1}{20}\right)^{7-1}$$

$$= \frac{1}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^{6}$$

$$= \frac{47045}{128000}$$

إذا كان: $X \sim Geo(1)$ ، فأجد كلا مما يأتي، مقرباً أجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

1) $P(X = 4)$

2) $P(X \leq 4)$

3) $P(X \geq 2)$

4) $P(3 \leq X < 5)$

5) $P(X < 2)$

6) $P(X > 5)$

7) $P(1 < X < 3)$

8) $P(4 < X \leq 6)$

9) $P(2 < X \leq 4)$

أجد التوقع من التغيرات العشوائية الآتية:

10) $X - Geo\ (0.8)$

11) $X - Geo\ (0.1)$

12) $X - Geo\ (0.75)$

أطلق عماد رصاصة نحو هدف بصورة متكررة، ثم توقف عند إصابته الهدف أول مرة. إذا كان احتمال إصابته الهدف في كل مرة هو 0.7 ، فأجد كلاً مما يأتي:

13) احتمال أن تصيب الهدف أول مرة في المحاولة العاشرة

14) احتمال أن تطلق رصاصتين على الأقل حتى يصيب الهدف أول مرة.

15) العدد المتوقع من الرصاصات التي سيطلقها عماد يصيب الهدف أول مرة.

دورت هديل مؤشر قرص بشكل متكرر، وكان القرص مقسما إلى 4 قطاعات متطابقة وملونة بالأحمر والأخضر والأزرق، والأصفر. إذا دل المتغير العشوائي X على عدد مرات تدوير مؤشر القرص حتى توقفه عند اللون الأصفر أول مرة، فأجد كلا مما يأتي:

16) احتمال أن يكون المرة الثالثة أول مرة هي يتوقف فيها مؤشر القرص عند اللون الأصفر.

17) احتمال أن تدور هديل مؤشر القرص أكثر من 4 مرات حتى يتوقف المؤشر عند اللون الأصفر أول مرة.

اذا كان X متغيرا عشوائيا هندسيا، وكان التوقع $E(X) = 2$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

18) $P(X = 1)$
19) $P(X > 3)$

الدرس الثاني: توزيع ذي الحدين

❖ **التجربة الاحتمالية ذات الحدين :** هي تكرار تجربة برنولي عددًا محددًا من المرات المستقلة

❖ **شروطها:**

- اشتمال الجربة على محاولات متكررة ومستقلة.
- فوز النتائج في كل محاولة إلى فشل ونجاح.
- ثبات احتمال النجاح في كل مرة.
- وجود عدد من المحاولات في التجربة.

❖ الفرق بين التجربة الاحتمالية الهندسية والتجربة الاحتمالية ذات الحدين هو:

التجربة الاحتمالية الهندسية لا يوجد عدد محدد من المحاولات دائما الوصول للهدف اما التجربة ذات الحدين فهي تمتلك عدد محدد من المحاولات.

بين إذا كانت تجربة عشوائية ذات حدين :

1) تدوير القاء 10 قطع نقدية منتظمة متمايزة ثم كتابة عدد الصور التي ظهرت.

ابحث في تحقق الشروط : بما انه يوجد القاء تكرار فى قطع النقد ، والقاء قطعة لا يؤثر في غيرها هذا يعني انها مستقلة .

- فرز النتائج الممكنةفي كل محاولة إلى نجاح ظهور الصورة) وفشل (ظهور الكتابة)
- و احتمال النجاح ثابت في كل مرة هو$\frac{1}{2}$

ووجود عدد محدد من المحاولات وهو 10 قطع.

هذا يعني انها تجربة احتمالية ذات حدين

2) سحب 5 مرات على التوالى من دون ارجاع ، من صندوق يحتوي على 8 كرات حمراء و 7 كرات صفراء ثم كتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

ابحث في تحقق الشروط : بما ان التجربة تتضمن محاولات متكررة (سحب (5) كرات) وبما ان نتيجة سحب كل كرة تتأثر بسحب الكرات السابقة بسبب عدم ارجاعها للصندوق فهذه المحاولات غير مستقلة

لا تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.

3) القاء حجر . النرد المنتظم 20 مرة ثم كتابة عدد المرات التي يظهر فيها العدد 1 على الوجه العلوي الحجر النرد.

ابحث في تحقق الشروط : هذه التجربة تحتوي على تكرار 20 مرة ونسبة النجاح ثابته وهي $\frac{1}{6}$ في حجر النرد (ظهور العدد 1) وتفرز النتائج لنجاح أو فشل ويوجد عدد محدد من المحاولات .

تجربة احتمالية ذات حدين

4 اختيار 7 طلبة عشوائيا من صف روضة فيه 10 ولدا و 10 بنات ، ثم كتابة عدد البنات الاتي وقع عليهن الاختيار.

ابحث في تحقق الشروط : يوجد تكرار (7) محاولات ولكن احتمال النجاح في كل مرة مختلف .

ليست تجربة احتمالية ذات حدين

التغير العشوائي X في تجربة الاحتمالية ذات الحدين يبدأ من الصفر

$$X = \{0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\}$$

$$X \sim B\ (n, p)$$

ذات الحدين

فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

$$P(X = r) = \binom{n}{r} P^r (1 - P)^{n-r}$$

نطبق قاعدة التوافيق

P احتمال النجاح / r = عدد المحاولات الناجحة من n.

n عدد المحاولات الكلي / $1 - P$ = احتمال الفشل

قانون التوافيق $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

يتم تحديد قيم X بعدد المحاولات الكلية n حيث يتم فك n وصولا إلى صفر.

أسئلة:

1 اذا كان $X \sim B(4,0.3)$ فجد ما يلي :

الحل:

احتمال النجاح $P = 0.3$

العدد الكلي $n = 4$

$$X = \{0,1,2,3,4\}$$

احتمال الفشل $1 - P = 1 - 0.3 = 0.7$

1) $P = (X = 2) \qquad r = 2$

$$P(X = r) = \binom{n}{r} P^r (1 - P)^{n-r}$$

$$P = (X = 2) = \binom{4}{2} (0.3)^2 (0.7)^2$$

$$= \frac{4!}{2!\,2!} (0.3)^2 (0.7)^2$$

$$= 0.2646$$

2) $P = (X > 2)$

$$= P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= \binom{4}{3} (0.3)^3 (0.7)^1 + \binom{4}{4} (0.3)^4 (0.7)^0$$

$$= \frac{4!}{(4-3)!\,3!} (0.027)^3 (0.7)^1 + (0.0081)(1)$$

تذكر أن $\binom{n}{n} = 1$ وأن عدد مرفوع للقوة صفر =1

$$= 0.0756 + 0.0081 = 0.0837$$

3) $P(X \le 3)$

$= 1 - P(X > 3) \Leftarrow$ وهذا الحل أسهل

$= 1 - P(X = 4)$

$= 1 - \binom{4}{4}(0.3)^4(0.7)^0$

$= 1 - 0.0081$

$= 0.9919$

2) اذا كان $X \sim B(5,0.1)$ فجد كلا من :

$n = 5 \quad , \quad p = 0.1$

$(1 - \text{P}) = 1 - 0.1 = 0.9$

$X = \{0,1,2,3,4,5\}$

احتمال الفشل $1 - P = 1 - 0.1 = 0.9$

1) $P(X = 4)$

$P(X = 4) = \binom{5}{4}(0.1)^4(0.9)^1$

$= 0.00045$

2) $P(X \le 2)$

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= \binom{5}{0}(0.1)^0(0.9)^5 + \binom{5}{1}(0.1)^1(0.9)^4$

$+ \binom{5}{2}(0.1)^2(0.9)^3 = 0.99144$

3) $P(X > 2)$

$= 1 - P(X \le 2)(X = 4)$

$1 - 0.99144 = 0.00856$

وفقاً لنموذج تقييم الخدمة الالكتروني في إحدى شركات صيانة الاجهزة المنزلية، تبين رضا 75% من الزبائن عن خدمات الشركة، إذا قدمت الشركة خدماتها لـ 10 زبائن في أحد الأيام، فجد كلاً مما يلي:

النجاح هو تحقيق رضا العميل $P = 75\%$

$$\frac{75}{100} = 0.7$$

بما انه يوجد صفران في المقام نضع الفاصلة بعد منزلتان في البسط

$1 - P = 1 - 0.75 = 0.25$

عدد الزبائن هو عدد المحاولات $n = 10$

$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$X \sim B(10,0.75)$

1) احتمال رضى 4 زبائن فقط عن خدمات الشركة

$$P(X = r) = \binom{n}{r} P^r (1 - P)^{n-r}$$

$$P(X = 4) = \binom{10}{4}(0.75)^4(0.25)^{10-4}$$

$$\approx 0.0162$$

2) احتمال رضى 3 زبائن على الأقل عن خدمات الشركة.

$P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3)$

$= 1 - ((P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0))$

$= 1 - \left(\binom{10}{2}(0.75)^2(0.25)^8 + \binom{10}{1}(0.75)^1(0.25)^9\right.$

$\left. + \binom{10}{0}(0.75)^0(0.25)^{10}\right) = 0.9996$

في دراسة تناولت حالة الطقس مدة طويلة في احدى المدن تبين ان احتمال ان يكون يوم ماطر هو $\frac{2}{7}$، اذا اخترت5 أيام عشوائيا، فجد كلا من:

$$P = \frac{2}{7}$$

$$n = 5$$

$$X = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$1 - P = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

1) احتمال أن يكون 3 أيام فقط ماطرة

الحل:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{7}\right)^3\left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$$= \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{8}{343}\right)\left(\frac{25}{49}\right)$$

$$= \frac{2000}{16807}$$

2) احتمال أن يكون يوم واحد ممطر على الأقل .

$$P(X \geq 1)$$

$$= (P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$+ P(X = 4) + P(X = 0))$$

لكن يمكن حسابها بطريقة اسهل

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$

$$= 1 - P(X = 1)$$

$$P(X = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{2}{7}\right)^0\left(\frac{5}{4}\right)^5$$

$$= (1)(1)\frac{3125}{16807} = \frac{3125}{16807}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{3125}{16807}\right)$$ توحيد مقامات

$$= \frac{13682}{16807}$$

❖ لحساب التوقع في المتغير العشوائي ذو الحدين

$$X \sim B(n, P)$$

$$X \epsilon \{0,1,2,3, \ldots \ldots n\}$$

$$E(X) = np$$

نضرب عدد المحاولات في احتمالية النجاح

بعد إجراء مسح لمنتج صنعته إحدى الشركات، تبين أن نسبة القطع المعيبة في هذا المنتج هي 8% إذا اختارت لجنة الرقابة الحكومية 50 قطعة من هذا المنتج عشوائيا،فأجد عدد القطع التي يتوق ع أن تكون معيبة من بين هذه القطع.

النجاح هو إيجاد قطعة معيبة $P = 8\%$

$$P = \frac{8}{100} = 0.08$$

عدد المحاولات هو عدد القطع

$$n = 50$$

$$X \sim B\{50, 0.08\}$$

$$E(X) = np = 50 \times 0.08 = 4$$

بعد إجراء مسح لمشتركي إحدى شركات الاتصالات، تبين أن 30% من المشتركين هم من الإناث. إذا اختير 400 مشترك عشوائيا لاستطلاع آرائهم حيال الخدمات التي تقدمها الشركة، فأجد عدد الإناث المتوقع في هذه العينة.

عدد المحاولات هو عدد المشتركين $n = 400$

$P = 30\% = \frac{30}{100} = 0.3$

$E(X) = np$

$= 400\left(\frac{3}{10}\right) = 120$

التباين للمتغير العشوائي ذي الحدين

$Var(X)$ أو σ^2

$X \sim B(n, P)$

فإن التباين

$Var(X) = \sigma^2 = np(1-p)$

$= E(X)(1-p)$

اغرس شجرة تستظل في ظلها غداً

اذا كان $X \sim B(20,0.7)$ فجد كلا من :

$n = 20$

$P = 0.7 = \frac{7}{10}$

$1 - P = 1 - 0.7 = 0.3$

1 التوقع.

$E(X) = np$

$= 20\left(\frac{7}{10}\right) = 14$

2 التباين.

$Var(X) = E(X)(1-p)$

$= 14(0.3) = \frac{42}{10} = 4.2$

اذا كان $X \sim B\left(400, \frac{3}{8}\right)$ فجد كلا من :

1 التوقع $E(X)$

$E(X) = np$

$= 400\left(\frac{3}{8}\right) = 150$

2 التباين.

$Var(X) = \sigma^2 = np(1-p)$

$= 150\left(1 - \frac{3}{8}\right)$

$= 150\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{750}{8}$

أتدرب وأحل المسائل

أبين إذا كانت التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية ذات حدين في كل مما يأتي:

1 إلقاء قطعة نقد 80 مرة، ثم تسجيل عدد مرات ظهور الكتابة.

الحل:

يوجد تكرار ويوجد عدد محدد من المحاولات وهو (80) و لا تؤثر تجربة على الأخرى واحتمال النجح ثابت وهو $\left(\frac{1}{2}\right)$ كما يتم فرز النتائج في كل مرة.

تجربة احتمالية ذات حدين

2 إلقاء حجر نرد منتظم 20 مرة، ثم كتابة عدد المرات التي ظهر فيها العدد 4 على الوجه العلوي لحجر النرد.

يوجد تكرار ويوجد عدد محدد من المحاولات وهو (20) و لا تؤثر تجربة على الأخرى واحتمال النجح ثابت وهو $\left(\frac{1}{6}\right)$ كما يتم فرز النتائج في كل مرة.

تجربة احتمالية ذات حدين

3 إطلاق أسهم بشكل متكرر نحو هدف، ثم التوقف عند إصابته اول مرة.

لانه يتوقف عند اصابته الهدف في أول مرة ولا يتم فرز النتائج.

ليست تجربة احتمالية ذات حدين

4 إذا كان X متغيرا عشوائيا ذا حدين، وكان معاملاه $n = 17, p = 0.64$ فأعبر عن هذا المتغير بالرموز.

$$X \sim B(10, 0.2)$$

5 $P(X = 2)$

$$P = 0.2 \quad n = 10$$

$$1 - P = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.2)^2(0.8)^{10-2}$$

$$= \frac{10!}{8!\,2!}(0.4)(0.1678)$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!\,2!}(0.4)(0.8)^8$$

$$= 45(0.4)(0.1678)$$

$$= 0.30204 \approx 0.302$$

6 $P(X = 5)$

$$= \binom{10}{5}(0.2)^5(0.8)^5$$

$$= \frac{10!}{5!\,2!}(00032)(0.8)^5$$

$$= \frac{10!}{5!\,2!}(00032)(0.8)^5$$

$$= 0.026$$

7 $P(X<3)$

$= P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)$

من الفرع رقم5 $= 0.302$

$P(X=1)=\binom{10}{1}(0.2)^1(0.8)^9$

$=10(0.2)(0.8)^9$

$=0.268$

$P(X=0)=\binom{10}{0}(0.2)^0(0.8)^{10}$

$=1(1)(0.8)^{10}$

$\cong 0.1074$

$\therefore P(X<3)=0.302+0.268+0.107$

$=0.678$

اذا كان $X\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$ فجد كلا من :

$n=3$

$P=\frac{2}{3}$

$1-P=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

8 $P(X=1)$

$=\binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{9}$

9 $P(X>1)$

جميع احتمالات القيم التي اكبر من 1

$P(X>1)=1-P(X=1)$

$=1-\left(P(X=1)+P(X=0)\right)$

$=1-\left(\frac{2}{9}+\binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)$

$=1-\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{27}\right)$ من الفرع 8

$=1-\left(\frac{7}{27}\right)=\frac{20}{27}$

10 $P(0\le X<2)$

$=P(X=0)+P(X=1)$

من الفرع 9

$=\frac{1}{27}+\frac{2}{9}=\frac{7}{27}$

مساجد: بعد إجراء مسح للمصلين في أحد مساجد العاصمة عمان تبين أن % 60 من هؤلاء المصلين تقل أعمارهم عن 50 عاما. إذا اختير 12 مصليا من مرتادي هذا المسجد عشوائيا فأجد كلا مما ياتي:

11 احتمال أن تقل أعمار 7 منهم فقط عن 50 عاما

$n = 12 \qquad P = \frac{60}{100} = 0.6$

$1 - P = 1 - 0.6 = 0.4$

$P(X = 7) = \binom{12}{7} (0.6)^7 (0.4)^5$

$= \frac{12!}{7!\,5!}(0.6)^7 (0.4)^5 = 0.227$

12 احتمال ان يقل عمر اثنين منهم على الأكثر عن 50 عاما.

$(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$

$P(X = 2) = \binom{12}{2} (0.6)^2 (0.4)^{10}$

$= \frac{12!}{10!\,2!}(0.6)^2 (0.4)^{10}$

$= 0.00249$

$P(X = 1) = \binom{12}{1} (0.6)^1 (0.4)^{11}$

$= (12)(0.6)(0.4)^{11}$

$= 0.000301$

$P(X = 0) = \binom{12}{0} (0.6)^0 (0.4)^{12}$

$= 0.0000167$

$(X \leq 2) = 0.00249 + 0.000301 + 0.0000167$

$= 0.003$

اجد التوقع والتباين لكل متغير عشوائي مما يأتي :

13 $X \sim B(5, 0.1)$

$n = 5$

$P = 0.1 = \frac{1}{10}$

$1 - P = 1 - 0.1 = 0.9 = \frac{9}{10}$

$E(X) = nP$

$= 5 \times \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{2}$

$Var(X) = \sigma^2 = nP(1 - P)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{9}{20} = 0.45$

14 $X \sim B\left(20, \frac{3}{8}\right)$

$n = 20 \qquad P = \frac{3}{8}$

$1 - P = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$E(X) = nP$

$20\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$

$Var(X) = nP(1 - P)$

$\frac{15}{2}\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{75}{16}$

اذا كان احتمال إصابة شخص ما بأعراض جانبية بعد أخذ مطعوما معينا هو 12% ، وقرر طبيب اعطاء 50 شخصا هذا المطعوم، ودل المتغير العشوائي X على عدد الأشخاص الذين ستظهر عليهم الأعراض الجانبية ، فأجد كلا مما يأتي:

15 احتمال ظهور الأعراض الجانبية على 3 أشخاص فقط ممن أخذوا المطعوم

$$P = 12\% \left(\frac{12}{100}\right) = \frac{3}{25} = 0.12$$

$$n = 50$$

$$1 - P = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25} = 0.88$$

$$P(X = 3) = \binom{n}{r}(1 - P)^{n-r}$$

$$= \binom{50}{3}(0.12)^3(0.88)^{47}$$

$$= 50 \times 49 \times 8 \times (0.12)^3\,(0.88)^{47}$$

16 العدد المتوقع للأشخاص الذين ستظهر عليهم أعراض المطعوم الجانبية.

$$E(X) = nP$$

$$= 50 \times (0.12) = 6$$

17 التباين للمتغير العشوائي X

$$Var(X) = E(X)(1 - P)$$

$$= 6(0.88) = 5.3$$

18 تبلغ نسبة حاملي فصيلة الدم $O -$ من سكان الأردن نحو 4% تقريبا. أجد عدد الأشخاص الذين يلزم إشراكهم في عينة عشوائية من السكان ، ويتوقع أن يكون منهم 10 أشخاص من حاملي فصيلة الدم $O -$:

الحل:

$$E(X) = 10$$

$$P = 4\% = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$E(X) = nP$$

$$10 = n \times (0.04)$$

$$n = 250$$

عدد الأشخاص هو 250

19 تبرير : اذكان $X \sim B(3, P)$ وكان $P(X = 2)$ فجد $P(X \geq 1) = \frac{215}{216}$ مبررا اجابتي

الحل:

$$X \sim B(3, P) \quad n = 3$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$

$$= 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - \left(\binom{3}{0}(P)^0(1-P)^3\right)$$

$$(1-P)^3 = 1 - \frac{215}{216}$$

$$(1-P)^3 = \frac{1}{216}$$

$$1 - P = \frac{1}{6}$$

$$1 - \frac{1}{6} = P \Rightarrow P = \frac{5}{6}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1$$

$$= \frac{75}{216}$$

20 اذكان $X \sim B(100, P)$ وكان التباين للمتغير العشوائي X هو 24 ، فأجد قيمة P مبررا اجابتي .

الحل:

$$Var(X) = 24 \qquad n = 100$$

$$Var(X) = nP(1-P)$$

$$24 = 100P(1-P)$$

$$24 = 100P - 100P^2$$

$$100P^2 - 100P + 24 = 0$$

$$25P^2 - 25P + 6 = 0$$

$$P^2 - P + 150 = 0$$

$$(P - 15)(P - 10) = 0$$

$$P = \frac{15}{25} \quad , \qquad P = \frac{2}{5}$$

20 تحد: يتألف اختبار لمبحث الجغرافيا من 25 سؤالا ، جميعها من نوع الاختيار من متعدد ، ولكل منها 4 بدائل ، واحد منها فقط صحيح ، ولكل فقرة 4 علامات. إذا أجاب رامي عن هذه الأسئلة جميعها بصورة عشوائية ، فما احتمال أن يحصل على علامة 76 من 100؟

الحل:

بما ان رامي حصل على علامة 76 معناه ان رامي أجاب على 19 فقرة بشكل صحيح من اصل 25 فقرة لأن كل فقرة 4 علامات

$$P = \frac{1}{4} \quad , \quad 1 - P = \frac{3}{4}$$

$$P(X = 19) = \binom{25}{19}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^6$$

21 يستطيع أحد حراس المرمى المحترفين صد أي ركلة جزاء باحتمال 20% إذا تعين على حارس المرمى التصدي لـ ركلّات جزاء في إحدى المباريات، فما احتمال أن يتمكن من صد ركلتين منها فقط؟

$$P = 20\% = \frac{20}{100}$$

$$= \frac{2}{10} = 0.2$$

$$1 - P = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(X = x) = \binom{n}{r}(P)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-r}$$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2}(0.2)^2(0.8)^3$$

$$= 0.205$$

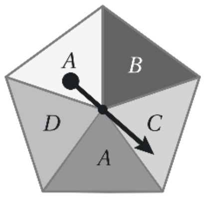
إذا كان $X \sim B\left(20, \frac{1}{8}\right)$، فأجد كلا مما يأتي:

1) $P(X = 18)$

2) $P(X \leq 3)$

3) $P(X < X \leq 3)$

يمثل الشكل المجاور قرصا على شكل خماسي منتظم. إذا دور مؤشر القرص 10 مرات ودل المتغير العشوائي X على عدد مرات توقف المؤشر على الحرف A ، فأجد كلا مما يأتي:



4) احتمال أن يتوقف المؤشر على الحرف A ثلاث مرات فقط.

5) احتمال أن يتوقف المؤشر على الحرف A ثلاث مرات على الأقل.

6) احتمال ألا يتوقف المؤشر على الحرف A نهائيا.

طيران : يواجه الطيارون صعوبة في الرؤيا باحتمال 0.25 عند الهبوط بالطائرات في أحد المطارات خلال فصل الشتاء بسبب سوء الأحوال الجوية إذا هبط طيار 20 مرة في هذا المطار شتاء ، فأجد كلا مما يأتي:

7) احتمال أن يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مرات فقط.

8) احتمال أن يواجه الطيار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مرات على الأقل.

9) احتمال أن يواجه الطيار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في المرات جميعها.

10) العدد المتوقع من المرات التي سيواجه فيها الطيار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط.

أجد التوقع والتباين لكل من المتغيرات العشوائية الآتية:

11) $X \sim B(40, 0.2)$

12) $X \sim B\ (280, 0.4)$

13) $X \sim B\ \left(48, \frac{1}{6}\right)$

14) أمراض: وفقا لدراسة طبية، فإن 9% من البالغين حو العالم مصابون بمرض السكرى إذا اختيرت عينة عشوائية من البالغين نضم 12000 شخص، فما العدد المتوقع من المصابين بمرض السكري في هذه العينة؟

الدرس الثالث: التوزيع الطبيعي

❖ **التوزيع الطبيعي:** هو منحنى يستخدم لنمذجة البيانات المتصلة التي تختار عشوائيا في حياتنا وله مميزات خاصة فيه.

❖ **خصائص المنحنى الطبيعي:**

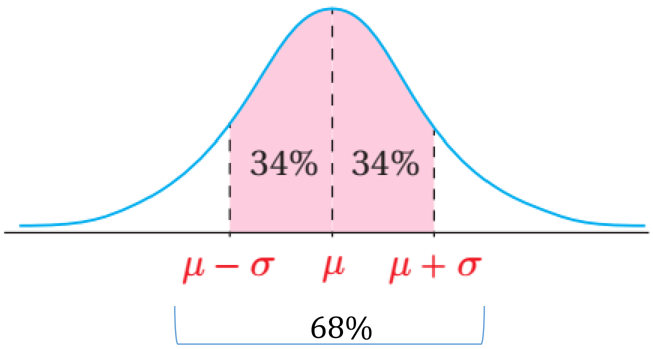
1) له شكل الجرس.
2) تطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال، وتوسط البيانات في كل منها.

الوسط = الوسيط = المنوال

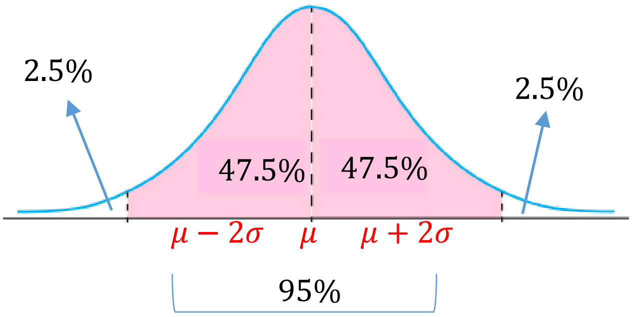
3) تماثل البيانات حول الوسط الحسابي.
4) اقتران المنحنى عند طرفيه من المحور x من دون أن يمسه .
5) المساحة الكلية أسفل المنحنى هي 1 .

❖ ويمكن استعمال قاعدة التجريبية لتحديد المساحة التي تقع بين بعض القيم من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي.

القاعدة التجريبية (النسب حفظ).



أي أن 68% من البيانات تقع بين $\mu-\sigma, \mu+\sigma$

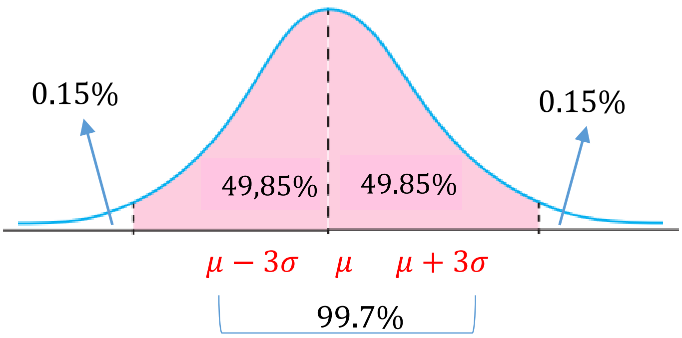


أي أن 95% من المشاهدات تقريبا تقع بين

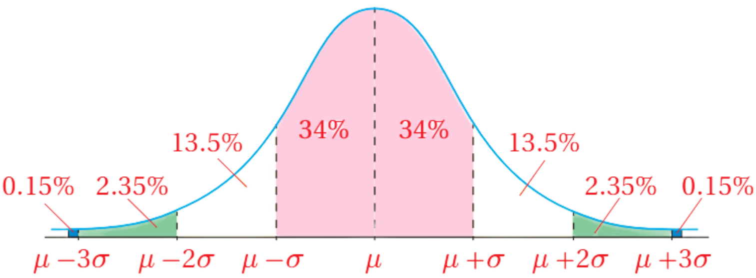
أي أن 95 % من $(\mu-2\sigma), (\mu+2\sigma)$

البيانات لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي

على مثلي قيمة الانحراف المعياري.



التوزيعات بالفترات الثلاث حفظ :



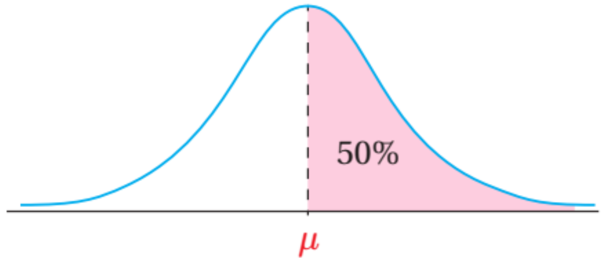
μ هو الوسط الحسابي

σ هو الانحراف المعياري

إذا اتخذت كتل مجموعة من الطلاب شكل المنحنى الطبيعي، فجد كلاً مما يلي:

1 النسبة المئوية للطلبة الذين كتلتهم فوق الوسط الحسابي

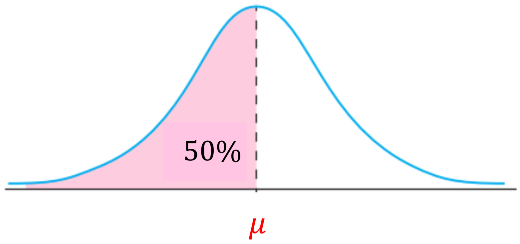
$$X > \mu$$



النسبة المئوية هي 50%

2 النسبة المئوية للطلبة الذين تقل تقع كتلهم فوق الوسط الحسابي :

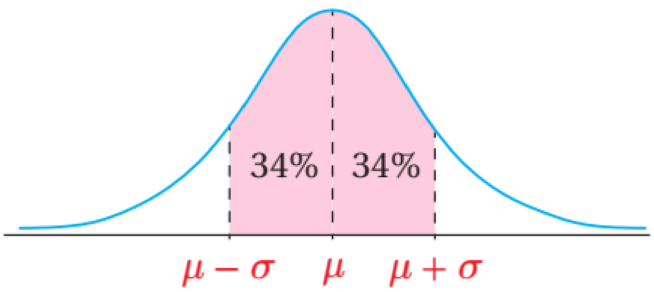
$$X < \mu$$



3 النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البعد بين كلتهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

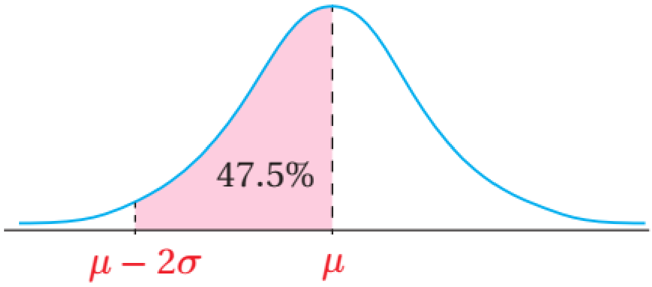
$$\Leftarrow \mu - \sigma < X < \mu + \sigma$$

يعني ان النسبة المئوية هي 68%



4 النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين أقل من الوسط الحسابي بمقدار انحرافين معياريين.

$$\Leftarrow X < \mu - 2\sigma$$



- بما ان 95% من المشاهدات تقع بين $(\mu - 2\sigma), (\mu + 2\sigma)$ وبما ان المطلوب هو النسبة التي تقل عن الوسط الحسابي فقط هذا يعني $\frac{95}{2} = 47.5\%$

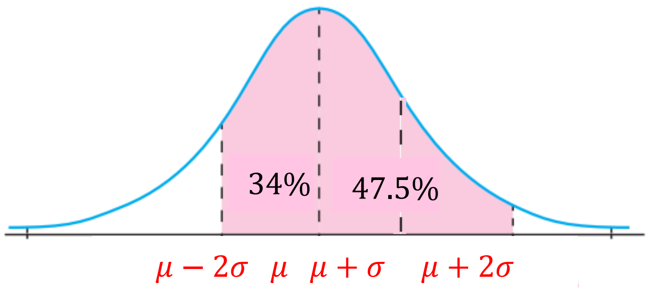
$\Leftarrow$ النسبة المئوية المطلوبة هي 47.5% .

5 النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين او تقل عنه بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد.

أكبر من الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين $(\mu + 2\sigma)$

تقل من الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف واحد $(\mu - \sigma)$

$$\Leftarrow \mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma$$



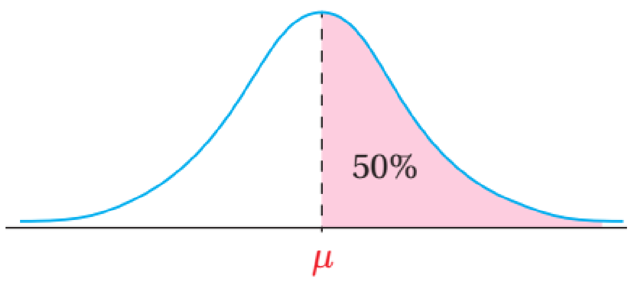
النسبة فوق الوسط الحسابي على انحرافين معياريين 47.5%

النسبة تحت الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد 81.5% وهي ناتج جمع النسبتان معاً.

إذا اتخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعة من طلبة الصف الثاني عشر على شكل المنحنى الطبيعي، فجد كلا مما يلي:

1 النسبة المئوية للطلبة الذين تقع اطوالهم فوق الوسط الحسابي

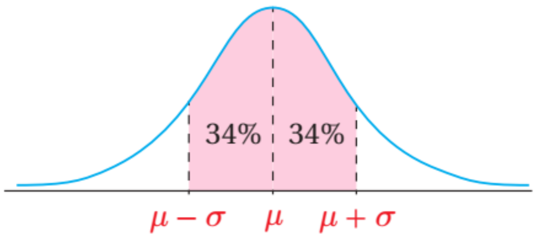
النسبة المئوية فوق الوسط الحسابي $(X>\mu)$ هي 50%



2 النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البعد بين اطوالهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

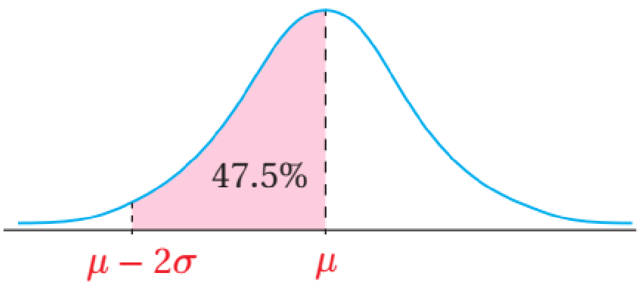
$$\mu-\sigma<X<\mu+\sigma$$

النسبة التي تمثل الطلبة 68%



3 النسبة المئوية للطلبة الذين تقل اطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

النسبة المئوية التي تقل عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين 47.5%

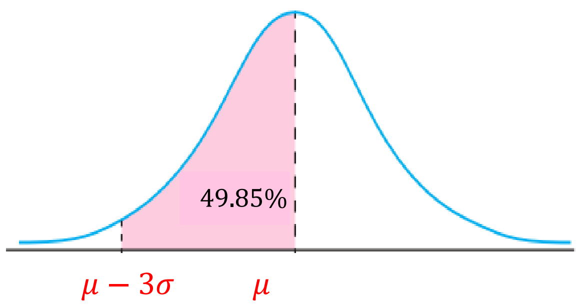


4 النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية او تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

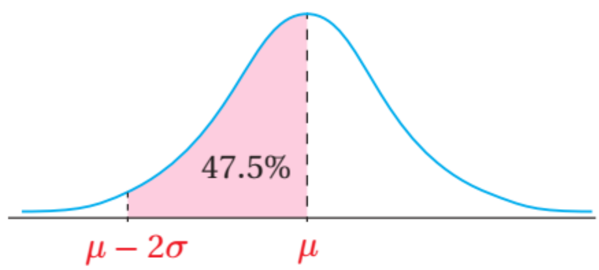
$$\mu - 3\sigma < X < \mu + 2\sigma$$

للذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية $(\mu - 3\sigma)$

هي 49.85%

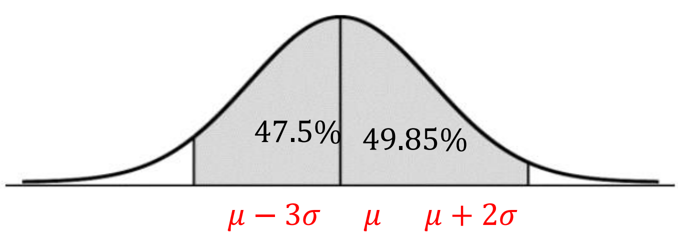


والنسبة المئوية للذين تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين$(\mu + 2\sigma)$



الان نجمع النسبتين:

$$= 49.85\% + 47.5\% = 97.35\%$$



المتغير العشوائي الطبيعي والتوزيع الطبيعي

- يوجد نوعان من المتغير العشوائي:
  - المتغير العشوائي المنفصل.
  - المتغير العشوائي المتصل.

المتغير العشوائي المنفصل: هو المتغير الذي يتخذ قيما معدودة.

مثل: عدد الأشجار، عدد السيارات.

المتغير العشوائي المتصل: هو المتغير الذي يأخذ قيماً متصلة ضمن فترة معينة من الاعداد الحقيقية.

مثل: سرعة اول سيارة التي ستمر امام إحدى المدارس $[0.80]$.

إذا ارتبط المتغير العشوائي المتصل X بتجربة عشوائية اتخذ تمثيلها شكل المنحنى الطبيعي فأنه يسمى متغيرا عشوائيا طبيعيا ويسمى توزيعه الاحتمالي التوزيع الطبيعي ويمكن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

حيث :

μ الوسط الحسابي

σ الانحراف المعياري

- نعلم ان المساحة تحت المنحنى هي 1 فيمكن ايجاد احتمال بعض القيم باستعمال القاعدة التجريبية
- لأي حادثفي الفضاء العيني لتجربة عشوائية فإن: $0 \leq P(A) \leq 1$

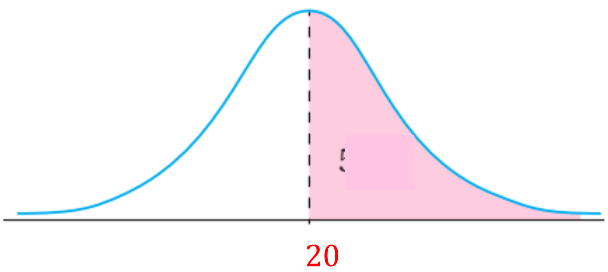
اذا كان $X \sim N(20.4)$ فجد ما يلي :

1) $P(X > 20)$

$$\mu = 20$$

$$\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4} \rightarrow \sigma = 2$$

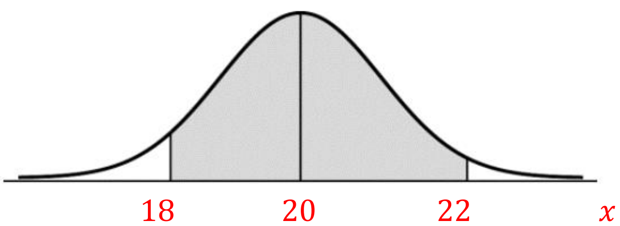
$$P(X > 20) = 0.5 = \frac{1}{2}$$



2) $P(18 < X < 22)$

$\therefore 68\%$

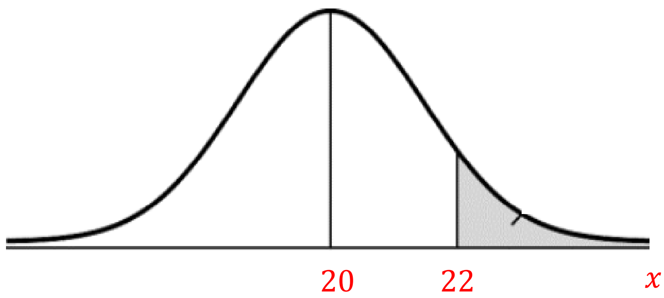
وهي النسبة بين $(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$



3 $P(X > 22)$

$\therefore 16\%$

وهي النسبة التي أكبر من $(\mu + \sigma)$



اذا كان $X \sim N(55.121)$ فجد ما يلي :

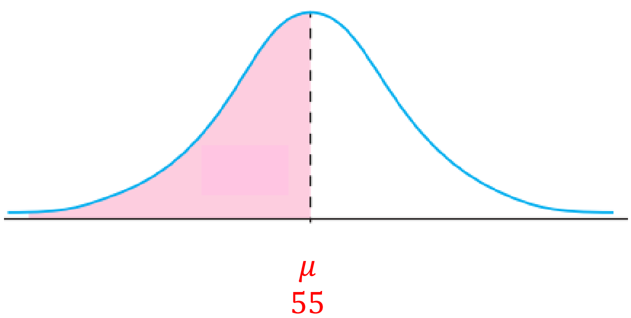
1 $P(X < 55)$

$\mu = 55 = \sigma^2 = 121 \rightarrow \sigma = 11$

وهي النسبة التي تقل عن الوسط الحسابي

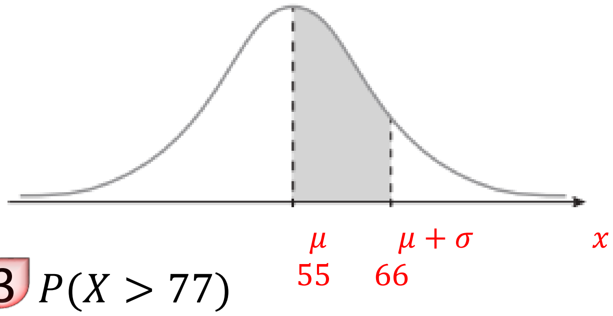
وهي: $(X < \mu)$

$\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

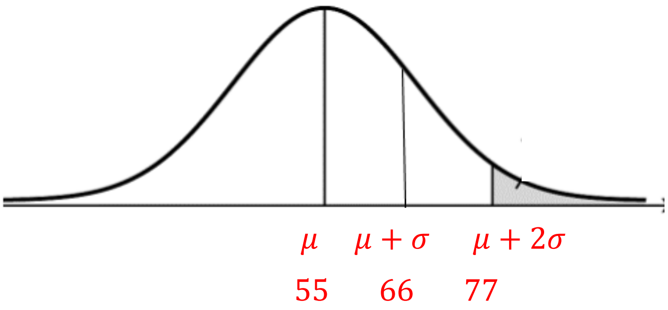


2 $P(55 < X < 66)$

النسبة هي : $0.34 = 34\%$



3 $P(X > 77)$



النسبة هي: $2.5\% = 0.025$

توصلت احدي الدراسات ان اطوال النساء في احدي المدن تتبع التوزيع الطبيعي وسطه الحسابي هو 167 cm و الانحراف المعياري 8 cm إذا تم اختيار امرأة عشوائيا فأجد كلا مما يلي:

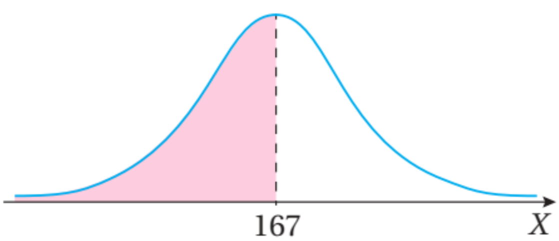
1 احتمال ان يكون طول المرأة اقل من 167 cm :

$X \sim N(167.8)$

$\mu = 167 \quad , \quad \sigma = 8$

$\therefore$ بما أن الوسط الحسابي $= 167$

$P(X < 167) = P(X < \mu) = 0.5 = \frac{1}{2}$



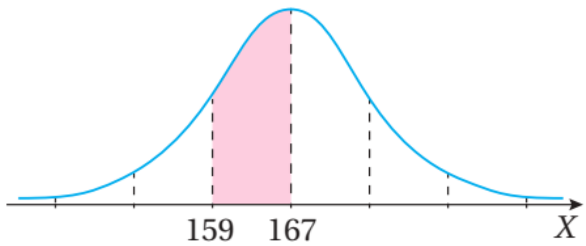
2 احتمال ان تتراوح اطوالهم بين

$159cm , 167cm$:

يعني: تبعد القيمة 159 انحراف معياري واحد وهي تمثل 34% من البيانات .

$P(159 < X < 167)$

$P(\mu - \sigma < X < \mu) = 0.34$



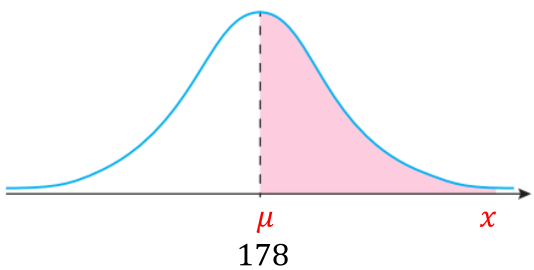
توصلت احدي الدراسات ان اطوال الرجال في احدي المدن تتبع التوزيع الطبيعي وسطه الحسابي هو 178 cm و الانحراف المعياري7 cm إذا تم اختيار امرأة عشوائيا فأجد كلا مما يلي:

1 احتمال ان يكون طول الرجل أكثر من $178\ cm$:

$$\mu = 178 \quad , \quad \sigma = 7$$

178 هو الوسط الحسابي أي ان القيم أكبر من الوسط الحسابي.

$$P(X > 178) = 0.5 = \frac{1}{2}$$



2 احتمال ان تتراوح اطوالهم بين

$171cm , 192cm$

171 أقل من الوسط الحسابي بانحراف معياري واحد .

$(171 < X) \Rightarrow (\mu - \sigma < X)$

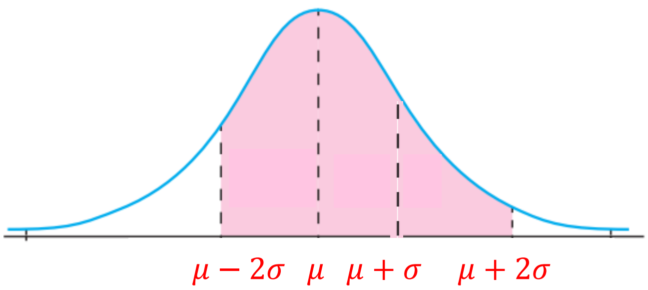
ونسبته : 34%

192 أقل من الوسط الحسابي بانحرافين معيارين.

$(X < 192) \Rightarrow (X < \mu + 2\sigma)$

ونسبته : 47.5%

النسبة فوق الوسط الحسابي على انحرافين



$\Rightarrow (\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma)$

$P(171 < X < 192)$

$= 34\% + 34\% + 13.5\%$

$= 81.5\% = 0.815$

أتدرب وأحل المسائل

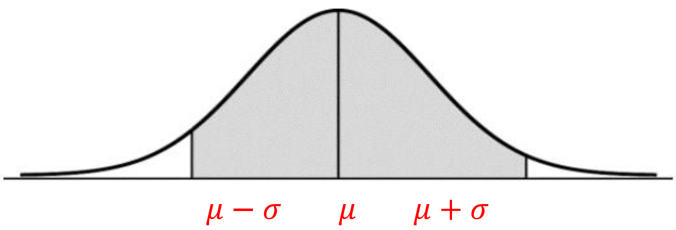
تتبع أطوال أشجار السرو في إحدى الغابات الحرجية توزيعا طبيعيا، وسطه الحسابي 18.5 m وانحرافه المعياري 2.5 m إذا اخترت شجرة سرو عشوائيا من تلك الغابة، فما احتمال أن يتراوح طولها بين 16 m و 21 m :

$\mu = 18.5 \qquad \sigma = 2.5$

16 أقل من الوسط الحسابي انحراف معياري واحد $(\mu - \sigma < X)$ ونسبته : 34%.

21 أكبر من الوسط الحسابي انحراف معياري واحد $(X < \mu + \sigma)$ ونسبته : 34%.

نجمع النسب :



$0.34 + 0.34 = 0.68$

اذا اتخذت علامات الطلبة في اختبار لمبحث التاريخ شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كلاً مما يأتي:

1) النسبة المئوية للعلامات التي تقع فوق الوسط الحسابي.

2) النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

3) النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

4) النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد أو تقل عنه بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية

1) النسبة المئوية للعلامات التي تقع فوق الوسط الحسابي هي : $P(X < \mu + \sigma)$ 50%

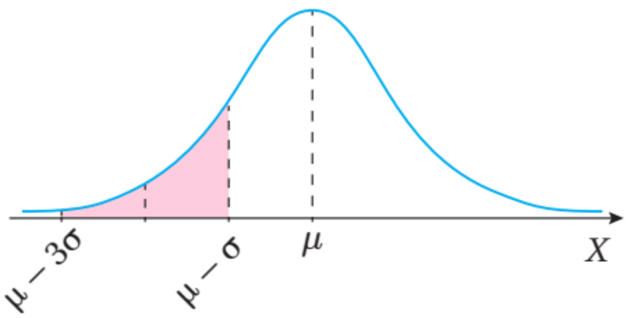
2) النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على انحرف معياري واحد هي : $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$ 68%

3) النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي : $P(X > \mu + 2\sigma)$ 47.5%

4) النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد هي : $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + \sigma)$ 83.85%

أحدد النسبة المئوية لمساحة المنطقة المظللة أسفل كل توزيع طبيعي مما يأتي:

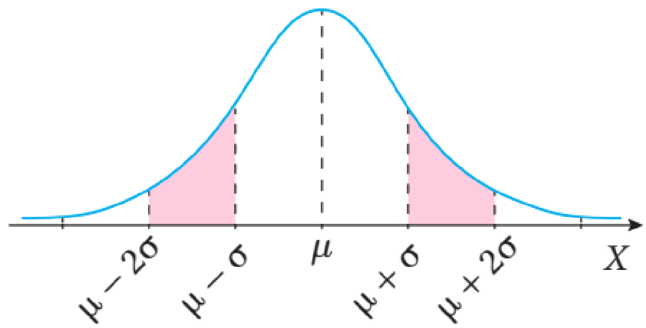
5



$P(\mu - 3\sigma < X < \mu - \sigma)$

$13.5\% + 2.35\% = 15.85\%$

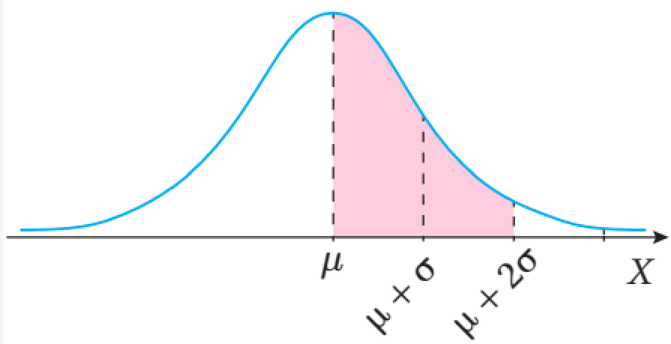
6



$P(< \mu - 2\sigma < X < \mu - \sigma) + P(< \mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma)$

$13.5\% + 13.5\% = 27\%$

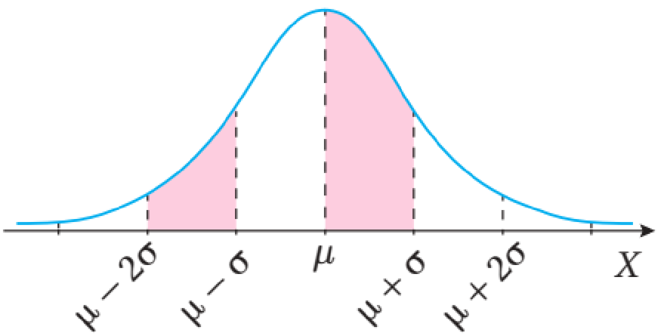
7



$P(\mu < X < \mu + 2\sigma)$

$34\% + 13.5\% = 47.5\%$

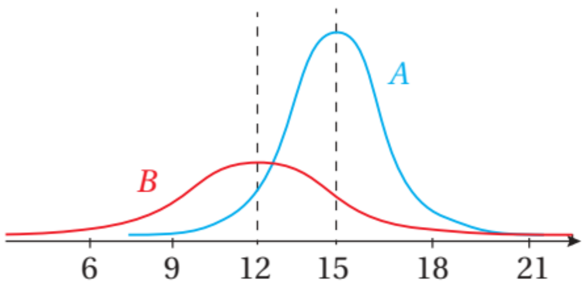
8



$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) + P(\mu < X < \mu + \sigma)$

$34\% + 13.5\% = 47.5\%$

9 يمثل كل من المنحنيين المجاورين توزيعا طبيعيًا. أقارن بين هذين التوزيعين من حيث: قيم الوسط الحسابي، والانحراف المعياري.



A:

الوسط الحسابي $(\mu) = 15$

الانحراف المعياري $(\sigma) = 3$

B:

الوسط الحسابي $(\mu) = 12$

الانحراف المعياري $(\sigma) = 3$

إذا كان $X \sim$ $X \sim N(79.144)$ جد كلاً من:

10 $P(X < 79)$

$\mu = 79$

$\sigma^2 = 144 \rightarrow \sigma = \sqrt{144} = 12$

$\Rightarrow P(X < \mu) = 50\% \frac{50}{100} = 0.5$

11 $P(67 < X < 91)$

$\Rightarrow P(\mu - 6 < x < \mu + \sigma)$

$= 0.34 + 0.34 = 68\%$

12 $P(X > 91)$

$P(X > \mu + \sigma) = 2$

$13.5\% + 2.35\% + 0.15\%$

$= 16\% = 0.16$

13 $(X > 103)$

$P(X > \mu + 2\sigma)$

$= 2.35\% + 0.15\% = 2.5\%$

$= 0.025$

14 $P(43 < X < 115)$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

$= 99.7\% = 0.997$

15 $P(X < 43)$

$= P(\mu - 3\sigma) = 0.15\% = 0.0015$

صناعة: اذا دل المتغير العشوائي X على أطوال أقطار رؤوس مثاقب (بالمليمتر) تنتجها آلة في مصنع، حيث $X \sim N(30,0.4^2)$ فأجد كلا مما يأتي:

16 $P(X > 30)$

$\mu = 30 \qquad \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.4^2} = 0.4$

$\Rightarrow P(X > \mu) = 0.5$

17 $P(29.6 < X < 30.4)$

$\Rightarrow P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

$= 34\% + 34\%$

$= 68\% = 0.68$

18 $P(29.2 < X < 30)$

$\Rightarrow P(\mu - 2\sigma < X < \mu)$

$= 47.5\% = \frac{47.5}{100} = 0.475$

19 $P(29.2 < X < 30.4)$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$

$= 34\% + 47.5\% + 13.5\%$

$= 81.5\% = 0.815$

صناعة: ينتج مصنع أكياس أسمنت تتبع كتلها توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 50 kg ، وانحرافه المعياري 2 kg إذا اختبر كيس أسمنت عشوائيًا، فأجد كلا مما يأتي:

20 احتمال أن يكون كتلة الكيس أكثر من 54

$\mu = 50 \qquad \sigma = 2$

$P(X > 54) = P(X > \mu + 2\sigma)$

$= 2.35\% + 0.15\%$

$= 2.5\% = 0.025$

احتمال أن تكون كتلة الكيس أكثر من 54 kg هي 0.025 .

21 احتمال أن تتراوح كتلة الكيس بين 44 kg و 52 kg :

$P(44 < X < 52)$

$\Rightarrow P(\mu - 3\sigma < X < \mu + \sigma)$

$= 2.35\% + 13.5\% + 34\% + 34\%$

$= 83.85\% = 0.8385$

احتمال أن تتراوح كتلة الكيس بين 44 kg و 52 kg هو 0.8385 .

مهارات التفكير العليا

22 أكتشف الخطأ قال يوسف: إن $X \sim N(4^2, t^2)$ متغير عشوائي طبيعي، وسطه الحسابي 4، وانحرافه المعياري t^2. أكتشف الخطأ في قول يوسف، ثم أصححه.

ان $X \sim N(4^2, t^2)$ متغير عشوائي طبيعي وسطه الحسابي 16 وانحرافه المعياري $\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{t^2} = \sigma = t$

23 **تبرير:** يدل المتغير العشوائي $X \sim N(100, \sigma^2)$ على أطوال الأفاعي (بالسنتيمتر) في أحد مجتمعاتها. إذا كانت أطوال 68 منها تتراوح بين 93 cm و 107 cm ، فأجد σ^2، مبررا إجابتي.

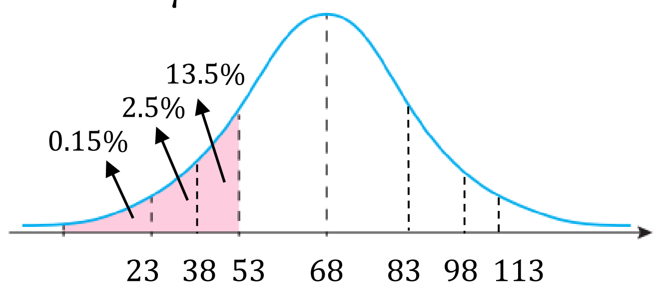
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 68\%$

$P(93 < X < 107) = 68\%$

$\sigma = 7 \Longrightarrow \sigma^2 = 49$

24 تحد: تبع العلامات في أحد الاختبارات توزيعا طبيعيا، وسطه الحسابي 68 ، وانحرافه المعياري 15. لم ينجح في الاختبار 16% من الطلبة، فأجد علامة النجاح.

$\mu = 68 \qquad \sigma = 15$



نجمع النسب من اليسار :

$0.15\% + 2.5\% + 13.5\% = 16\%$

علامة النجاح هي 53 .

اذا اتخذ التمثيل لأطوال مجموعة من طلبة الصف السابع شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كلا مما يأتي :

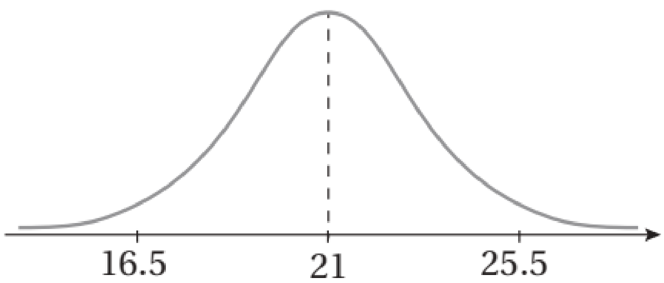
1) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي.

2) النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البعد بين أطوالهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

3) النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

4) النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين

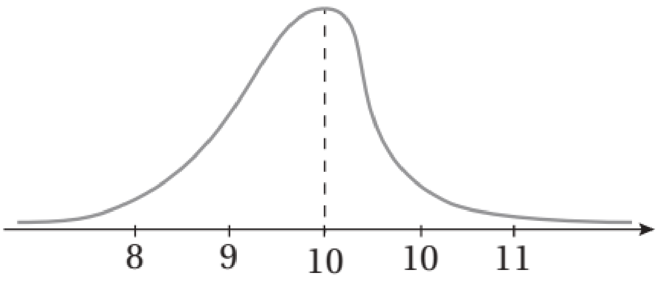
5) يبين الشكل المجاور منحنى توزيع طبيعي. أعبر عن المتغير العشوائي لهذا التوزيع باستعمال الرموز.



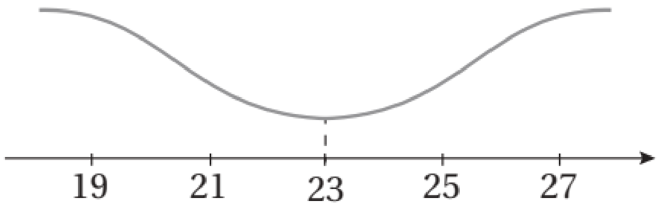
$2\sigma = 3$

أبين لماذا لا يمثل أي من التمثيلين الآتيين منحنى توزيع طبيعي:

6)



7)



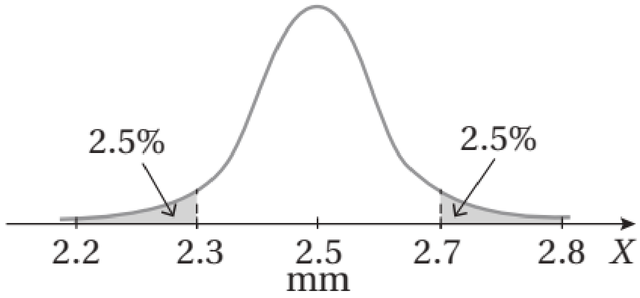
إذا كان: $X \sim N(8, 0.14)$ ، فأجد كلا مما يأتي:

8) $P(X > 8)$

9) $P(6.8 < X < 8.2)$

10) $P(X > 8.4)$

صناعة: يمكن نمذجة أطوال أقطار مسامير ينتجها مصنع بمنحنى التوزيع الطبيعي المبين في الشكل المجاور:



11) أجد كلا من الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لأطوال أقطار المسامير.

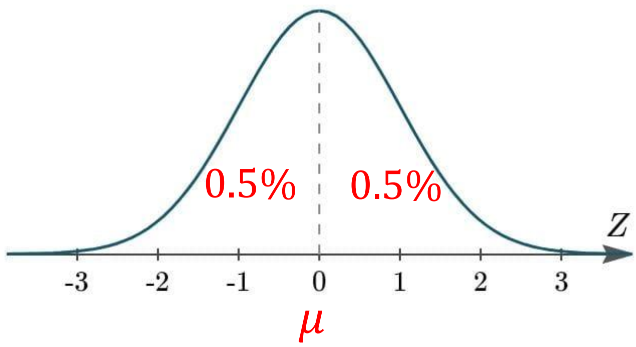
12) أجد النسبة المئوية للمسامير التي يزيد طول قطر كل منها على الحسابي بما لا يزيد على انحرافين معياريين

الدرس الرابع: التوزيع الطبيعي المعياري

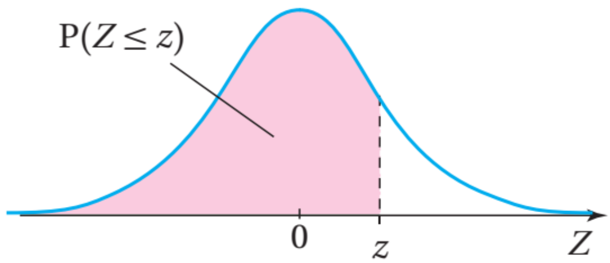
❖ هو توزيع الوسط الحسابي له μ يساوي صفر والانحراف المعياري هو (σ) يساوي واحد.

ويعبر عنه

$$\boldsymbol{Z \sim N(0,1)}$$



❖ ونستعمل حرف Z بدلاً من X للدلالة على انه توزيع طبيعي معياري.



❖ احتمالية Z هو المساحة تحت المنحنى مثل $P(Z \leq Z)$.

ويتم حسابها من خلال جدول التوزيع الطبيعي $P(Z \leq Z) = P(Z < Z)$

إشارة المساواة ليست مهمة لان المساحة أسفل المنحنى نقطة واحدة .

حتى نستطيع اخذ القيمة من الجدول يجب أن تكون: $P(Z <$ عدد$)$.

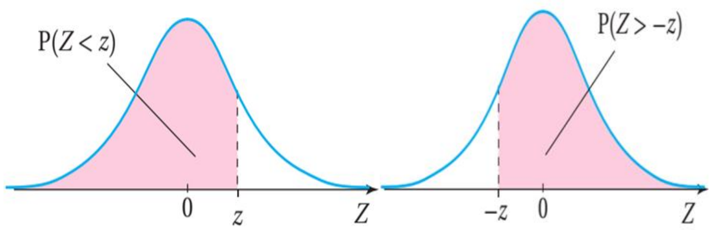
1 $P(Z \leq 0.35)$

مباشرة من الجدول

$= 0.6368$

2 $P(Z > A) = P(Z < A)$

❖ اذا كانت إشارة أكبر و A سالبة نقلب الأكبر الى اصغر ونعكس السالب الى موجب.



3 $P(Z > A) = 1 - P(Z < A)$

4 $P(Z > -A) = 1 - P(Z < A)$

❖ اذا كان شرط ناقص نع واحد ناقص .

جد ما يلي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي:

1 $P(Z < 1.34)$
$= 0.9099$

2 $P(Z > -2.01) = P(Z < 2.01)$
$= 0.9778$

3 $P(Z < 0.69)$
$= 0.7549$

4 $P(Z > -1.67)$
$P(Z > -1.67) = P(Z < 1.67)$
$= 0.9525$

جد ما باستعمال جدول التوزيع الطبيعي:

a) $P(Z < 3.05)$
b) $P(Z > -2.88)$

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جد كلا مما يلي مستخدما جدول التوزيع الطبيعي:

1 $P(Z > 1.25)$

$P(Z > 1.25) = 1 - P(Z < 1.25)$

$= 1 - 0.8944 = 0.1056$

2 $P(Z < -0.62)$

$P(Z < -0.62) = 1 - P(Z < 0.62)$

$P(Z < -0.62) = 1 - 0.7324$

$= 0.2676$

3 $P(Z > 2.56)$

$P(Z > 2.56) = 1 - P(Z < 2.56)$

$= 1 - 0.9948 = 0.0052$

4 $P(Z > 1.01)$

$P(Z > 1.01) = 1 - P(Z1.01)$

$= 1 - 0.8438 = 0.1562$

5 $P(Z < -0.09)$

$P(Z < -0.09) = 1 - P(Z < 0.09)$

$= 1 - 0.5359 = 0.4641$

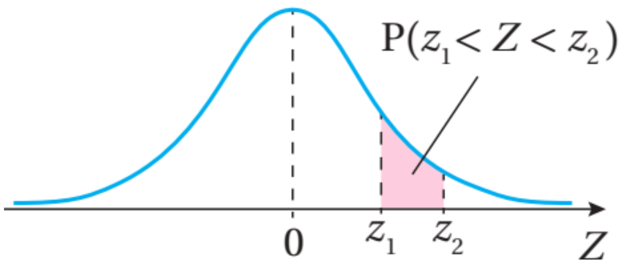
6 $P(Z < -1.52)$

$= 1 - 0.9357 = 0.0643$

اذا طلب السؤال

$P(Z_1 < Z < Z_2)$

$= P(Z < Z_2) - P(Z < Z_1)$



جد كلا مما يلي باستخدام جدول التوزيع المعياري.

1 $P(0.47 < Z < 1.1)$

$P(Z < 1.1) - P(Z < 0.47)$

$= 0.8643 - 0.6808 = 0.1835$

2 $P(-1.5 < Z < 2.34)$

$= P(Z < 2.34) - P(Z < -1.5)$

$= P(Z < 2.34) - (1 - P(Z < -1.5))$

$= 0.9904 - (1 - 0.9332)$

$= 0.9904 - 0.0668 = 0.9236$

3 $P(0 < Z < 0.33)$

$= P(Z < 0.33) - P(Z < 0)$

$= 0.6293 - 0.5 = 0.1293$

4 $P(-1 < Z < 1.25)$

$= P(Z < 1.25) - P(Z < -1)$

$= P(Z < 1.25) - (1 - P(Z < 1))$

$= 0.8944 - (1 - 0.8413)$

$= 0.8944 - 0.1587 = 0.7357$

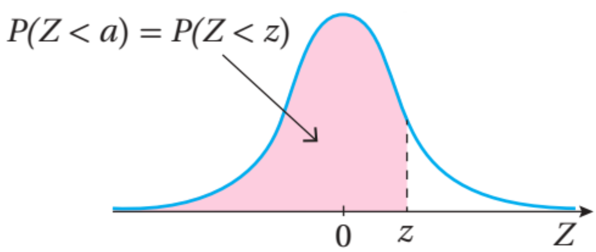
❖ اذا علم الإحتمال وطلب قيمة المتغير العشوائي نستعل الجدول لحسابه.

جد قيمة a في كل مما يلي :

1 $P(Z < a) = 0.8212$

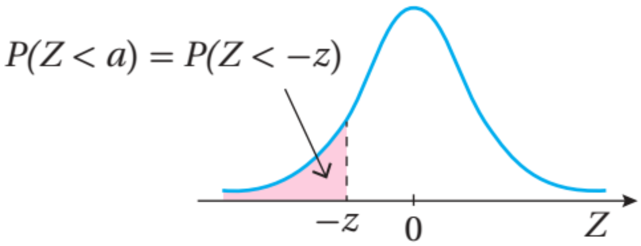
يتم حسابها من الجدول مباشرة

$a = 0.92$



2 $P(Z < a) = 0.32$

بما ان قيمة الإحتمال أقل من 0.5 فهذا يعني ان قيمة a سالبة نفرض انها $-Z$:



$P(Z < a) = P(Z < -Z)$

$= 1 - P(Z < Z)$

$1 - 0.32 = 0.68$

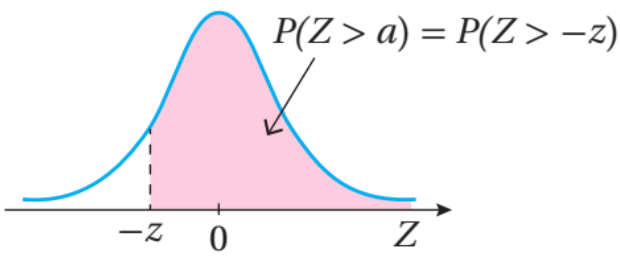
الاحظ ان القيمة الإحتمال 0.68 غير موجودة بالجدول فنأخذ اقرب قيمة له وهي 0.6772

من الجدول 0.46 وبما ان قيمة $a = -Z$ فإن

$a = -0.46$

3 $P(Z > a) = 0.9406$

بما ان قيمة الإحتمال أكثر من 0.5 فهذا يعني ان قيمة a سالبة :



$P(Z < -z) = P(Z < z)$

$= 0.9406$

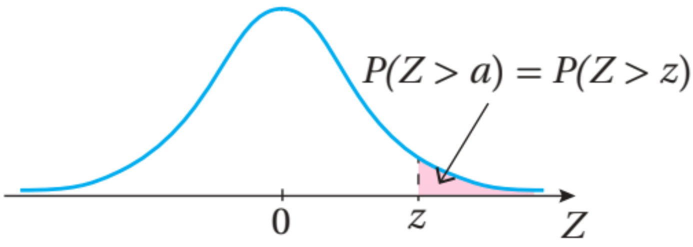
من الجدول هي 1.56:

$a = -1.56$

4 $P\ (Z\ > a) = 0.015$

بما ان قيمةالإحتمال أقل من 0.5 فهذا يعني ان

قيمة a موجبة :



$P(Z\ >\ z)\ =\ 1\ -\ P(Z\ <\ z)$

$=\ 1\ -\ 0.015$

$P(Z\ <\ z) = 0.985$

$0.985 = P(Z\ <\ z)$

من الجدول 0.985 هي 2.17:

$a = 2.17$

5 $P\ (Z\ < a)\ =\ 0.9788$

بما ان قيمةالإحتمال أكبر من 0.5 فهذا يعني ان

قيمة a موجبة، من الجدول مباشرة :

$a = 2.03$

6 $P\ (Z\ < a)\ =\ 0.25$

بما ان قيمةالإحتمال أقل من 0.5 فهذا يعني ان

قيمة a سالبة :

$P\ (Z\ < a)\ =\ P(Z\ < -Z)$

$P(Z\ < -Z) = 1 - P(Z\ < Z)$

$=\ 1\ -\ 0.25$

$= 0.75$

لانجد بالجدول 0.75 نأخذ الاقل منها 0.7486

$a = Z = -0.67$

7 $P\ (Z\ >\ a)\ =\ 0.9738$

بما ان قيمةالإحتمال أكبر من 0.5 فهذا يعني ان

قيمة a سالبة:

$P\ (Z\ < a)\ =\ P(Z\ < -z)$

$P\ (Z\ < -z)\ =\ P(Z\ < z)$

$= 0.9738$

$Z = a = -1.94$

8 $P\ (Z\ >\ a)\ =\ 0.2$

قيمةالإحتمال أقل من 0.5 فهذا يعني ان قيمة a موجبة:

$P(Z\ >\ a) = 1 - P(Z\ >\ Z)$

$=\ 1\ - 0.2$

$= 0.8$

$Z = a = 0.84$

أتدرب وأحل المسائل

تذكر: ان حتى نحصل على الرقم من الجدول يجب ان تكون $P\ (Z\ < z)$.

جد مما يأتي، مستعمل جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1 $P\ (Z < 0.68)$

مباشرة من الجدول

$= 0.7422$

2 $P\ (Z\ < \ 1.54)$

مباشرة من الجدول

$= 0.9382$

3 $P\ (Z\ > \ 0.27)$

$= \ 1 - P(Z\ < \ 0.27)$

$= \ 1 - 0.6064\ = \ 0.3936$

4 $P\ (0.49 < Z < 2.9)$

$= \ P(Z < 2.9)\ - \ P\ (Z\ < \ 0.49)$

$= \ 0.9817 - 0.6879$

$= \ 0.3102$

5 $P\ (-0.08\ < Z < \ 0.8)$

$= P\ (Z < 0.8)\ - (1 - (P\ (Z\ - 0.08))$

$= 0.7881 - (1 - 0.5319\ )$

$= 0.7881 - 0.4681 = 0.32$

6 $P\ (0\ < Z < \ 1.07)$

$= \ P\ (Z\ < \ 1.07)\ - \ P\ (Z\ < \ 0)$

$= 0.8577 - 0.5$

$= 0.3577$

7 $P\ (Z\ < -1.25)$

$= 1 - P\ (Z\ < \ 1.25)$

$= 1 - 0.8944 = 0.1056$

8 $P\ (Z\ > -1.99)$

$P(Z\ < \ 1.99) = 0.9767$

9 $P\ (0.5\ < Z < \ 0)$

$P(Z < \ 0) - P(Z < -0.5)$

$= \ P(Z\ < 0)\ - (1\ - \ P(Z\ < \ 0.5))$

$= \ 0.5\ - \ (1\ - \ 0.6915)$

$= \ 0.5\ - \ 0.3085$

$= \ 0.1915$

10 $P(Z < 0.43)$
$= 0.6664$

11 $P(Z > 3.08)$
$= 1 - P(Z < 3.08)$
$= 1 - 0.9990$
$= 0.001$

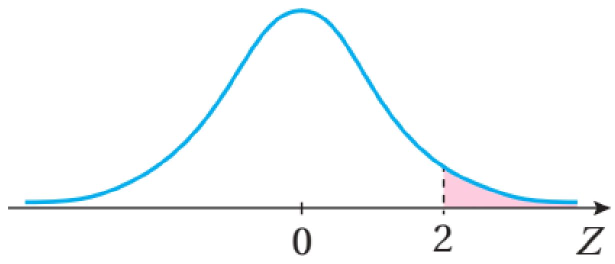
12 $P(Z < -2.03)$
$= 1 - P(Z < 2.03)$
$= 1 - 0.9788 = 0.0212$

13 $P(Z < -2.2)$
$= 1 - P(Z < 2.2)$
$= 1 - 0.9861 = 0.0139$

14 $P(-0.72 < Z < 3.26)$
$= P(Z < 3.26) - P(Z < -0.72)$
$= P(Z < 3.26) - (1 - P(Z < 0.72))$
$= 0.7636$

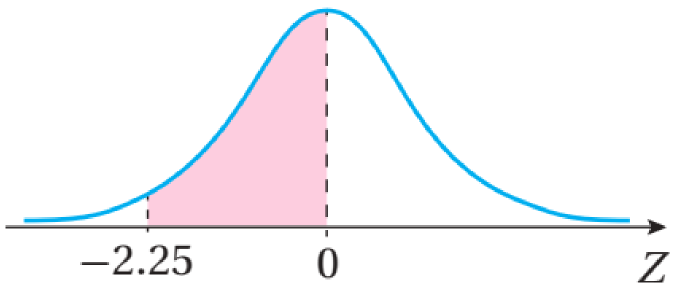
15 $P(1.5 < Z < 2.5)$
$= P(Z < 2.5) - P(Z < 1.5)$
$= 0.9938 - 0.9332$
$= 0.0606$

16 أجد مساحة المنطقة المظللة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كل مما يأتي:



$P(Z > 2)$
$= 1 - P(Z < 2)$
$= 1 - 0.9772$
$= 0.0228$

17 أجد مساحة المنطقة المظللة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كل مما يأتي:



$= P(-2.25 < X < 0)$
$= P(Z < 0) - (1 - P(Z < 2.25))$
$= 0.5\ (1 - 0.9878)$
$= 0.5 - 0.0122$
$= 0.4878$

أجد قيمة a التي تحقق المعطي في كل مما يأتي:

18 $P(Z < a) = P(Z < z)$

$0.7642 = P(Z < 2)$

$Z = 0.72$

$a = 0.72$

19 $P(Z < a) = 0.13$

$P(Z > -Z) = 1 - P(Z < Z)$

$0.13 = 1 - P(Z < -Z)$

$0.13 = 1 - P(Z < Z)$

$P(Z < Z) = 0.87$

$z = 1.12$

$a = -1.12$

20 $P(Z < a) = 0.8531$

$P(Z > a) = P(Z > -z)$

$0.8531 = P(Z > -z)$

$0.8531 = P(Z < z)$

$P(Z < z) = 0.8531$

$z = 1.05$

$a = -1.05$

21 $P(Z > a) = 0.372$

$P(Z > a) = P(Z > z)$

$0.372 = P(Z > z)$

$0.372 = 1 - P(Z < z)$

$= P(Z < z) = 1 - 0.372$

$P(Z < z) = 0.628$

$z = 0.32$

$a = -0.32$

مهارات التفكير العليا

22 أكتشف الخطأ :عبرت روان عن المتغير العشوائي الطبيعي المعياري على النحو الآتي :

$N\sim Z(1, 0^2)$ ✗

$Z \sim N(0,1)$

23 **تحد:** إذا كان $a > 0$ فأثبت أن:

$: P(-a < Z < a) = 2P(Z < a) - 1$

$P(-a < Z < a)$

$= P(Z < a) - P(Z < -a)$

$= P(Z < a) - (1 - P(Z < a)$

$= P(Z < a) - 1 + P(Z \ a)$

$= 2P(Z < a) - 1$

أجد كلا مما يأتي، مستعملا جدول التوزيع الطبيعي المعياري

1) $P(Z < 1.42)$

2) $P(Z < 0.87)$

3) $P(Z > 1.06)$

4) $P(Z < -2.78)$

5) $P(Z > -1.33)$

6) $P(1.1 < Z < 2.1)$

7) $P(-2.65 < Z < -1.43)$

8) $P(0.24 < Z < 1.1)$

9) $P(Z < -0.54)$

10) $P(-1.8 < Z < 1.8)$

11) $P(Z < -1.75)$

12) $P(Z > 0.81)$

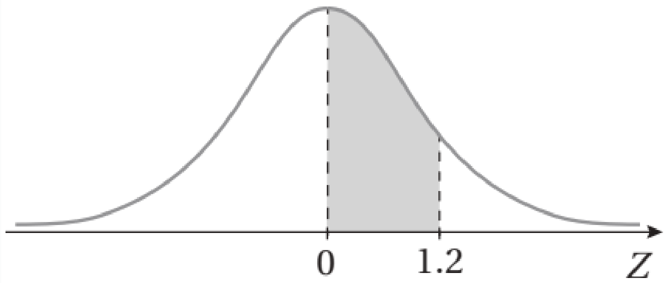
13) $P(-1 < Z < -0.33)$

14) $P(0.4 < Z < 1.7)$

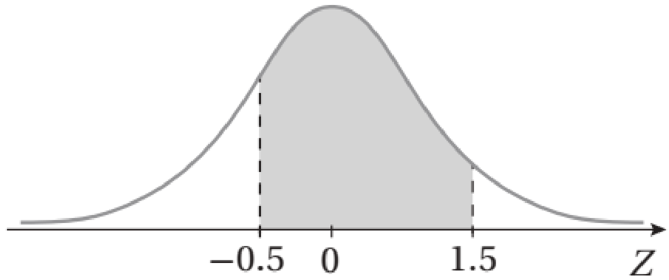
15) $P(Z - \geq 2.09)$

أجد مساحة المنطقة المظللة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كل مما يأتي:

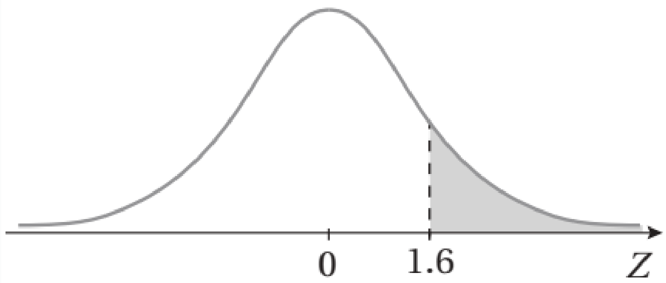
16)



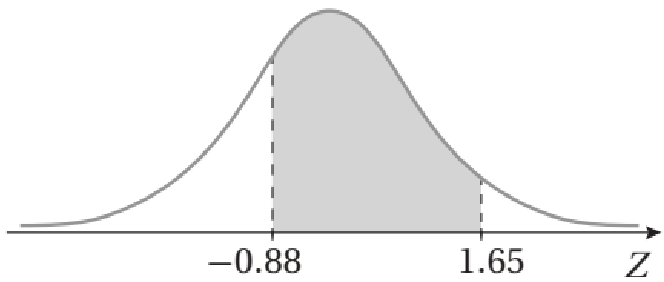
17)



18)



19)



أجد قيمة a التي تحقق الاحتمال المعطى في كل مما يأتي:

20) $P(Z < a) = 0.9082$

21) $P(Z < a) = 0.0314$

22) $P(Z > a) = 0.95$

23) $P(Z < a) = 0.5442$

24) $p(Z > a) = 0.2743$

25) $P(Z > a) = 0.6231$

26) اذا كان $Z \sim N(0,1)$ وكان $P(1 < Z < C) = 0.1408$ فاجد فيمة لثابت C:

الدرس الخامس: احتمال المتغير العشوائي الطبيعي باستعمال جدول

- تعلمنا ايجاد احتمالية القيم X من خلال القيمة التجريبية وتعلمنا إيجاد الاحتمال من خلال جداول التوزيع الطبيعي المعياري.

وفي هذا الدرس سنتعلم كيف نحول قيم X المتغير العشوائي Z لنستطيع ان نجد الاحتمالات من الجدول.

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}\Longleftarrow \text{المعيارية}$$

- ثم نستطيع استعمال Z لإيجاد الاحتمالية من الجدول.

اذا كان X متغير عشوائي طبيعي وسطه الحسابي 64 وانحرافه المعياري 5، فإن قيمة Z المعيارية التي تقابل قيمة x في كلل ما يلي :

1) $x=70$

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$=\frac{70-64}{5}=\frac{6}{5}=1.2$$

2) $x=55$

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$=\frac{55-64}{5}=\frac{-9}{5}=-1.8$$

اذا كان X متغير عشوائي طبيعي وسطه الحسابي 15 وانحرافه المعياري 4، نجد قيمة Z المعيارية التي تقابل قيمة x في كلل ما يلي:

1) $x=24$

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$=\frac{24-15}{4}=\frac{9}{4}$$

$$=2.25$$

2) $x=10$

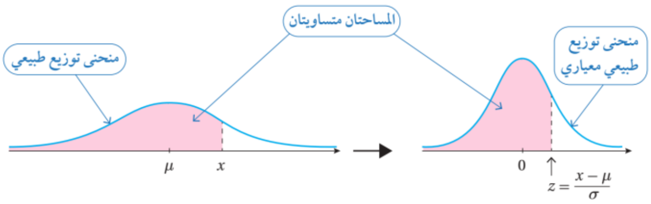
$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$=\frac{10-15}{4}$$

$$=-\frac{5}{4}=-1.25$$

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $Z\sim N(0,1)$

$\mu=\mu,\sigma=\sqrt{\sigma}$ $\mu=0,\sigma=1$



عند ايجاد قيمة Z المعيارية المقابلة للمعطاة عن طريق $Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ فإنه عند طرح القيم من الوسط الحسابي يصبح الوسط الحسابي صفر وليس μ وعند قسمة القيم على الانحراف المعياري يصبح الانحراف المعياري 1 وليس σ لذلك نستطيع أن نستخدم جدول التوزيع المعياري .

اذا كان $X \sim N(36, 8^2)$ فجد احتمال كلا مما يلي مستعملا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1 $P(X < 42)$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{42-36}{8} = \frac{3}{4}$$

$$Z = 0.75$$

$$P(Z < 0.75)$$

من الجدول مباشرة

$$= 0.7734$$

2 $P(X > 28)$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{28-36}{8} = -\frac{8}{8} = -1$$

$$P(Z > -1) = P(Z < 1)$$

$$= 0.8413$$

اذا كان $X \sim N(7, 0.5)$ فجد احتمال كلا مما يلي مستعملا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1 $P(X < 7.7)$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{7.7-7}{0.5} = \frac{0.7}{0.5} = \frac{7}{5} = 1.4$$

$$P(Z < 1.4)$$

$$= 0.9192$$

2 $P(X > 6.1)$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{6.1-7}{0.5} = \frac{-0.9}{0.5} = \frac{-9}{5} = -1.8$$

$$P(Z > -1.8) = P(Z < 1.8)$$

$$= 0.9641$$

3 $P(6 < X < 7.1)$

$$X = 6$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{6-7}{0.5} = \frac{-1}{0.5} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$X = 7.1$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{7.1-7}{0.5} = \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$P(-2 < Z < 0.2)$$

$$= P(Z < 0.2) - P(Z < -2)$$

$$= P(Z < 0.2) - \big(1 - P(Z < 2)\big)$$

$$= 0.5793 - (1 - 0.9772)$$

$$= 0.5793 - 0.0228$$

$$= 0.5565$$

تتبع كتل ثمار الجوافة في إحدى مزارع غور الأردن توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 70 g، وانحرافه المعياري 4 g :

1 أجد نسبة ثمار الجوافة التي تزيد كتلة كل منها على 8 g.

$P(X > 80)$

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$= \frac{80-70}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$

$P(Z > 2.5)$

$= 1 - P(Z < 2.5)$

$= 1 - 0.9938 = 0.0062$

إذا وضعت في الشاحنة 4500 ثمرة جوافة من انتاج هذه المزرعة فجد عدد ثمار الجوافة التي تقل كتلة منها عن 65 g في هذه الشاحنة.

$P(X < 65)$

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$= \frac{65-70}{4} = \frac{-5}{4} = -1.25$

$P(Z < -1.25) = 1 - P(Z < 1.25)$

$= 1 - 0.8944 = 0.1056$

$n = N \times P$

$n = 4500 \times 0.1056$

≈ 475

تتبع ثمار البندورة في إحدى المزارع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي 90g انحرافه المعياري 5g، جد ما يلي :

1 نسبة ثمار البندورة التي تقل كتلتها عن 80 g

$X \sim N(90, 5^2)$

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$= \frac{80-90}{5} = \frac{10}{5} = -2$

$= P(Z < -2)$

$= 1 - P(Z < 2)$

$= 1 - 0.9772 = 0.0228$

2 إذا احتوى صندوق على 200 حبة بندورة من نتاج هذه المزرعة. فجد عدد الثمار التي تزيد كتلة كل لي منها عن 100g في هذا الصندوق.

$P(X > 100)$

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$= \frac{100-90}{5} = \frac{10}{5} = 2$

$P(Z > 2)$

$= 1 - P(Z < 2)$

$= 1 - 0.9772 = 0.0228$

$n = N \times P$

$= 200 \times 0.0228$

$4.56 \cong 5$

أتدرب وأحل المسائل

إذا كان X متغيرا عشوائيًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 224، وانحرافه المعياري 6، فأجد القيمة المعيارية Z التي تقابل قيمة X في كل مما يأتي:

1 $X = 239$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{239-224}{6} = \frac{15}{6} = 2.5$$

2 $X = 200$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{200-224}{6} = \frac{-24}{6} = -4$$

3 $X = 224$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{224-224}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

إذا كان $X \sim N(30,100)$ فأجد كل احتمال مما يأتي، مستعملا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

4 $P(X < 35)$

$X \sim N(30,10^2)$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{35-30}{10} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$P(Z < 0.5) = 0.6915$

5 $P(X > 38)$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{38-30}{10} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$P(Z > 0.8) = 1 - P(Z < 0.8)$

$= 1 - 0.7881 = 0.2119$

6 $P(35 < X < 40)$

$X = 35$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{35-30}{10} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$X = 40$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{40-30}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$= P(0.5 < Z < 1)$

$= P(Z < 1) - P(Z < 0.5)$

$= 0.8413 - (1 - 0.6915)$

$= 0.8413 - 0.3085 = 0.5328$

7 $P(X < 20)$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{20-30}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

$$P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1)$$

$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

8 $P(15 < X < 32)$

$X = 15$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{15-30}{10} = \frac{-15}{10} = -1.5$$

$X = 32$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{32-30}{10} = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$P(-1.5 < Z < 0.2)$$

$$P(Z < 0.2) - P(Z < -1.5)$$

$$= P(Z < 0.2) - \big(1 - P(Z < 1.5)\big)$$

$$= 0.5793 - (1 - 0.9332)$$

$$= 0.5793 - 0.0668 = 0.5125$$

9 $P(17 < X < 19)$

$X = 17$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{17-30}{10} = \frac{-13}{10} = -1.3$$

$X = 19$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{19-30}{10} = \frac{-11}{10} = -1.1$$

$$P(-1.3 < Z < -1.1)$$

$$P(Z < -1.1) - P(Z < -1.3)$$

$$= 1 - P(Z < 1.1) - \big(1 - P(Z < 1.3)\big)$$

$$= 1 - 0.8643 - (1 - 0.9032)$$

$$= 0.1357 - 0.0968 = 0.0389$$

اذا كان $X \sim N\,(154, 144)$ فجد احتمال كلا مما يلي مستعملا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$X \sim N(154, 12^2)$

10 $P(X < 154)$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{154-154}{12} = \frac{0}{12} = 0$$

$$P(Z < 0) = 0.5$$

11 $P(X < 160)$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{160-154}{12} = \frac{6}{12} = 0.5$$

$$P(Z > 0.5) = 1 - P(Z < 0.5)$$

$$= 1 - 0.6915 = 0.3085$$

12 $P(140 < X < 155)$

$$X = 140$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{140-154}{12} = \frac{14}{12} = -1.17$$

$$X = 155$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{155-154}{12} = \frac{1}{12} = 0.08$$

$$P(-1.17 < X < 0.08)$$

$$P(Z < 0.08) - P(Z < -1.17)$$

$$= P(Z < 0.08) - \big(1 - P(Z < 1.17)\big)$$

$$= 0.5319 - (1 - 0.8790)$$

$$= 0.1357 - 0.1210 = 0.0147$$

قياس : يتبع محيط خصر 1200 شخص توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 78 cm ، وانحرافه المعياري 5 cm:

13 أجد نسبة الأشخاص الذين يقل محيط الخصر لكل منهم عن 70 cm :

$$X \sim N(78, 5^2)$$

$$P(X < 70)$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{70-78}{5} = -\frac{8}{5} = -1.6$$

$$P(Z < -1.6) = 1 - P(Z < 1.6)$$

$$= 1 - 0.9452$$

$$= 0.0548$$

14 أجد عدد الأشخاص الذين يتراوح محيط الخصر لكل منهم بين 70cm و80cm :

$$X = 70$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{70-78}{5} = \frac{-8}{5}$$

$$= -1.66$$

$$X = 80$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{80-78}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$P(-1.6 < Z < 0.4)$

$P(Z < 0.4) - P(Z < 1.6)$

$= P(Z < 0.4) - \left(1 - P(Z < 1.6)\right)$

$= 0.6554 - (1 - 0.9452)$

$= 0.6554 - 0.0548$

$= 0.6006$

$n = N \times P$

$= 1200 \times 0.6006$

$= 720.700 \cong 720$

بطاريات: تنتج إحدى الشركات بطاريات من نوع AA ويتبع عمر هذه البطاريات توزيعا طبيعيا، وسطه الحسابي 25 ساعة، وانحرافه المعياري 1.5 ساعة. إذا اختيرت بطارية عشوائيا، فأجد كلا مما يأتي:

15 احتمال أن يكون عمر البطارية أكثر من 28 ساعة.

$X \sim N(25, 1.5^2)$

$P(X > 28)$

$Z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

$= \dfrac{28 - 25}{1.5} = \dfrac{30}{15} = 2$

$P(Z > 2)$

$= 1 - P(Z < 2)$

$= 1 - 0.9772 = 0.0228$

16 احتمال أن يكون عمر البطارية أكثر من 20 ساعة .

$P(X > 20)$

$Z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

$= \dfrac{20 - 25}{1.5} = \dfrac{-5}{1.5} = -3.33$

$Z = -3.33$

$= P(Z > -3.33) = 1 - P(Z < 3.33)$

$= 1 - 0.9996 = 0.0004$

17 احتمال أن يتراوح عمر البطارية بين 22 ساعة و 25 ساعة

$X = 22$

$Z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

$= \dfrac{22 - 25}{1.5} = -\dfrac{3}{1.5} = -2$

$X = 25$

$Z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

$= \dfrac{25 - 25}{1.5} = \dfrac{0}{1.5} = 0$

$P(-2 < Z < 0)$

$P(Z < 0) - P(Z < -2)$

$= P(Z < 0) - \left(1 - P(Z < 2)\right)$

$= 0.5 - (1 - 0.9772)$

$= 0.5 - 0.0228 = 0.4772$

إدارة السير: في دراسة لإدارة السير، تبين أن السرعة السيارات على أحد الطرق تتبع توزيعا طبيعيا، وسطة الحسابي 68.5 km/h ، وانحرافه المعياري 5 km/h. إذا كانت السرعة القصوى المحددة على هذا الطريق هي 70km/h ، وكان العدد الكلى للسيارات التي تسير على هذا الطريق في أحد الأيام هو 1300 سيارة، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا :

السرعة	درجة المخالفة
(75−85) km/h	الأولى
أكثر من (85) km/h	الثانية

$\mu = 68.5$ الوسط الحسابي

$\sigma = 5$ الانحراف المعياري

18 أجد العدد التقريبي للسيارات التي ستتجاوز السرعة المحددة على الطريق في هذا اليوم.

$$X \sim N(68.5, 5^2)$$

$$P(X > 70)$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{70 - 68.5}{5} = \frac{1.5}{5} = 0.3$$

$$P(Z > 0.3) = 1 - P(Z < 0.3)$$

$$= 1 - 0.6179$$

$$= 0.3821$$

$n = N(\text{عدد السيارات}) \times P(\text{النسبة})$

$$= 1300 \times 0.3821$$

$$= 496.73$$

≈ 496 سيارة

19 أذا كان نظام المراقبة على هذا الطريق يرصد مخالفات من درجتين بحسب مقدار تجاوز الحد الأقصى للسرعة كما في الجدول المجاور، فأجد عدد المخالفات التي سجلت من كل درجة في هذا اليوم.

$$P(75 < X < 85)$$

$$X = 75$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{75 - 68.5}{5} = \frac{6.5}{5} = 1.3$$

$$X = 85$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{85 - 68.5}{5} = \frac{16.5}{5} = 3.3$$

$$P(1.3 < Z < 3.3)$$

$$P(Z < 3.3) - P(Z < 1.3)$$

$$= 0.9996 - 0.9032 = 0.0963$$

$n = N(\text{عدد السيارات}) \times P(\text{النسبة})$

$$= 1300 \times 0.0964$$

$$= 125.3200 \cong 125$$

$P(X > 85)$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{85 - 68.5}{5} = \frac{16.5}{5} = 3.3$$

$$P(Z > 3.3) = 1 - P(Z < 3.3)$$

$$= 1 - 0.9996$$

$$= 0.0005$$

$$n = N(\text{عدد السيارات}) \times P(\text{النسبة})$$

$$= 1300 \times 0.0005$$

$= 0.65 \cong 1$ مخالفة واحدة

مهارات التفكير العليا

20 **تبرير:** إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، وكانت القيمة المعيارية التي تقابل $x = 14$ هي $z = 3.2$ ، والقيمة المعيارية التي تقابل $x = -6$ هي $z = -1.8$، فأجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

$$3.2 = \frac{14 - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow 3.2\sigma = 14 - \mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$-1.8 = \frac{-6 - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow -1.8\sigma = -6 - \mu \ldots\ldots\ldots (2) \times -1$$

$$\Rightarrow 1.8\sigma = 6 + \mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

نجمع (1) مع (3)

$$5\sigma = 20 \Rightarrow \sigma = 4$$

نعوض في (3)

$$1.8(4) = 6 + \mu \Rightarrow \mu = 1.2$$

$$\therefore \sigma = 4 \quad , \quad \mu = 1.2$$

21 **تحد:** إذا كانت معدلات 600 طالب تتبع توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 73، وانحرافه هو المعياري هو 8، وقررت إدارة المدرسة تكريم الطلبة الخمسين الحاصلين على أعلى المعادلات من بين هؤلاء الطلبة، فما أقل معدل للطلبة الخمسين؟

0790943489

اذا كان X متغير عشوائيًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 89، وانحرافه المعياري 11.5، فأجد القيمة المعيارية Z التي تقابل قيمة X في كل مما يأتي:

1) $X = 81$

2) $X = 92$

3) $X = 100$

اذا كان X متغير عشوائيا طبيعيا، وسطه الحسابي 220، وانحرافه المعياري 10، فأجد القيمة X التي تقابل قيمة المعيارية Z في كل مما يأتي:

4) $Z = 2$

5) $Z = -3.5$

6) $Z = 4.2$

اذا كان $X \sim N(17,100)$ فأجد كل احتمال مما يأتي، مستعملاً جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

7) $P(X < 25.8)$

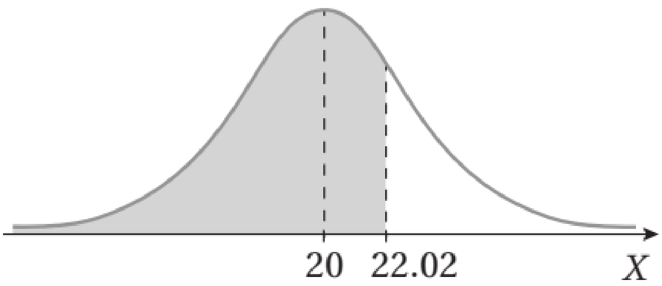
8) $P(X > 10.5)$

9) $P(19.4 < X < 30.2)$

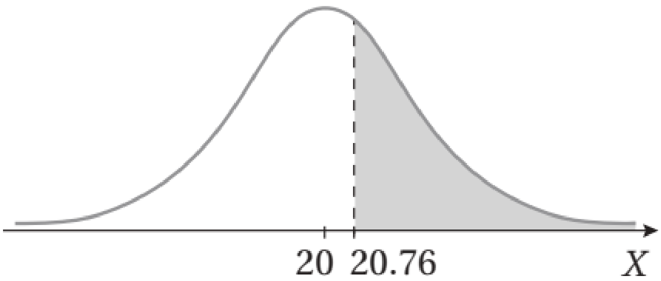
10) $P(4 < x < 17)$

اذا كان $X \sim N(10,9)$ فأجد مساحة المنطقة المظللة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي X في كل مما يأتي:

11)



12)



رياضة : تتبع أطوال لاعبي كرة السلة توزيعا طبيعيا، وسطه الحسابي 185 cm، وانحرافه المعياري 5 cm إذا اختير لاعب عشوائيا، فأجد كلا مما يأتي:

13) احتمال أن يزيد طول اللاعب على 165 cm .

14) احتمال أن يتراوح طول اللاعب بين 180 cm و 190 cm.

15) العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد أطوالهم على 195 cm من بين 2000 لاعب.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $X \sim B(4, 0.4)$، فإنَّ: $P(X = 3)$ يساوي:

a) 0.1536
b) 0.0384
c) 0.064
d) 0.3456

2 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان معامله $n = 320$، وتوقُّعه 60، فإنَّ المعامل p هو:

a) $\frac{3}{16}$
b) $\frac{13}{16}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{5}{16}$

3 إذا كان: $X \sim B(8, 0.1)$، فإنَّ: $P(X < 2)$ إلى أقرب 4 منازل عشرية يساوي:

a) 0.3826
b) 0.8131
c) 0.4305
d) 0.1488

4 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان توقُّعه 8، وتباينه $\frac{20}{3}$، فإنَّ المعامل n هو:

a) 32
b) 64
c) 56
d) 48

5 النسبة المئوية لمساحة المنطقة المحصورة بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي هي:

a) 68%
b) 95%
c) 99.7%
d) 89.7%

6 إذا كانت علامات 2000 طالب في أحد الاختبارات تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 83، وانحرافه المعياري 4، فإنَّ عدد الطلبة الذين تقلُّ علاماتهم عن 80 هو تقريبًا:

a) 453
b) 1547
c) 1567
d) 715

إذا كان: $X \sim Geo(0.3)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

7 $P(X = 4)$
8 $P(3 < X \leq 5)$
9 $P(X > 4)$
10 $E(X)$

إذا كان: $X \sim B(6, 0.3)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

11 $P(X = 2)$
12 $P(X > 4)$
13 $P(2 \leq X < 3)$
14 $E(X)$

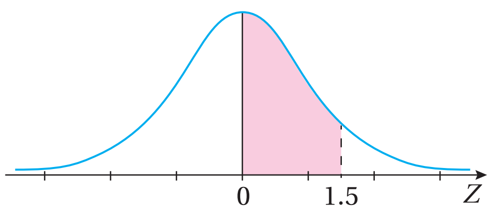
أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

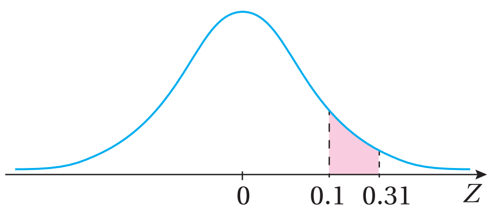
15 $P(Z < 1.93)$
16 $P(Z < 0.72)$
17 $P(Z > -1.04)$
18 $P(-1.7 < Z < 3.3)$

إذا كان: $X \sim N(55, 16)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

19 $P(X \leq 50)$
20 $P(50 < X < 58)$
21 $P(56 < X < 59)$
22 $P(X > 55)$

أجد مســاحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

23


24


25 تبيَّن في مصنع للمصابيح الكهربائية أنَّ احتمــال أنْ يكون أيُّ مصباح من إنتاج المصنع تالفًا هو 0.17. إذا اختير 100 مصباح عشــوائيًّا من إنتــاج المصنع، فأجد العدد المُتوقَّع من المصابيح التالفة.

أخذت نور تُراقِب السيّارات المارَّة أمــام منزلها. إذا كان احتمــال أنْ تمرَّ أيُّ ســيّارة زرقــاء من أمــام منزلها هو 0.1، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

26 احتمــال عدم مرور أيِّ ســيّارة زرقاء مــن بين أوَّل 5 سيّارات مَرَّت أمام المنزل.

27 احتمال مرور أكثر من 3 ســيّارات حتى شــاهدت نور أوَّل سيّارة زرقاء.

أجد القيمة a التي تُحقِّق كل احتمال ممّا يأتي:

28 $P(Z < a) = 0.638$

29 $P(Z > a) = 0.6$

تعبئة: **يُعبِّئ مصنعٌ حبوبَ الحِمَّص في أكياس تتبع كتلها توزيعًا طبيعيًّا، وســطه الحســابي 250 g، وانحرافه المعياري 4 g:**

30 أجد نســبة أكياس الحِمَّــص التي تزيد كتلــة كلٍّ منها على 260 g

31 أجد نســبة أكياس الحِمَّص التي تتراوح كتلة كلٍّ منها بين 240 g و 250 g

في دراسة لإحدى شــركات الاتصالات، تبيَّن أنَّ 30% من المشــتركين يستعملون هواتفهم المحمولة لإجراء مكالمتين فقط يوميًّا. إذا اختير 20 شــخصًا من المشتركين عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

32 احتمال أنْ يُجْــري 4 منهم فقط مكالمتين هاتفيتين في اليوم الواحد.

33 احتمال أنْ يُجْــري اثنان منهم علــى الأقل مكالمتين هاتفيتين في اليوم الواحد.

34 تُنتِج إحدى الشركات قوارير زيت، ويُفترَض أنْ تحوي كل قارورة منها نصف لتــر من الزيت، وأنْ يتبع حجم الزيت في هذه القوارير توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 506 mL، وانحرافــه المعيــاري 3 mL. إذا احتــوى صندوق على 100 قارورة توضَع عشــوائيًّا، فأجد عدد القوارير في هذا الصندوق التي تحوي كلٌّ منها زيتًا أقل من نصف لتر.